1. Integrali Impropri del primo tipo

domenica 19 dicembre 2021 12:44

Definiamo:

Integrale improprio di 1° specie / 1° tipo:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R \to +\infty} \int_a^R f(x)\,dx$$

2.. Integrali impropri del secondo tipo

domenica 19 dicembre 2021 21:07

Sia $f: [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione che sia integrabile in ogni intervallo chiuso e limitato $[a, c]$ con $a < c$.

Chiamiamo integrale improprio di seconda specie di f su $[a, b)$ il seguente limite:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$$

3. Teorema del confronto per gli integrali impropri

domenica 19 dicembre 2021 21:10

Siano f, g continue in $[a, +\infty)$,

con $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, +\infty)$

Allora:

- Se $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,dx = +\infty$

- Se $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx < +\infty \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$

<u>DIM</u>

Fissiamo $R \in (a, +\infty)$

Poichè f, g sono R-integrabili in $[a, R]$, si ha che per il <u>teorema del confronto per integrali impropri</u> (di

Per integrali impropri (di Analisi 1) si ha:

$$0 \leq \int_a^R f(x)\,dx \leq \int_a^R g(x)\,dx$$

(utilizzando il fatto che $0 \leq f(x) \leq g(x)$)

Passando al limite, $R \to +\infty$, si ha la tesi $\blacksquare$

4. Convergenza puntuale

domenica 19 dicembre 2021 21:28

Sia $I \subset R$ un sottoinsieme.

Data la successione di funzioni $\{f_n\}_{n \in N}$, dove

$f_n : I \to R \quad \forall n \in N$

Diremo che la successione $\{f_n\}$ <u>converge puntualmente</u> ad $f : I \to R$ in I

se accade che:

$$\lim_{k \to +\infty} f_k(x_0) = f(x_0) \quad \forall x_0 \in I$$

(x_0 fissato)

In termini di ε:

$\forall \varepsilon > 0, \forall x_0 \in I \quad \exists \bar{n}(\varepsilon, x_0)$ t.c.

$$|f_k(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall k > \bar{n}$$

∎

5.. Convergenza uniforme

domenica 19 dicembre 2021 21:33

Data la successione di funzioni $\{f_n\}$, con

$$f_k : I \to R \quad \forall k \in N$$

Diremo che la successione $\{f_n\}$ <u>converge uniformemente</u> ad $f : I \to R$ in I se e solo se accade che:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \bar{n}(\varepsilon)$ t.c.

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I \quad \forall k > \bar{n}$$

<u>OSS</u>

Equivalentemente possiamo

Equivalentemente possiamo dire che:

f_K converge uniformemente ad f in I se e solo se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \bar{n}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\sup_{x \in I} |f_K(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$\blacksquare$

6. Teorema sulla continuità della funzione limite

domenica 19 dicembre 2021 21:56

Sia $f_K : I \subseteq R \to R$ una successione di funzioni continue t.c. $f_K \xrightarrow{u} f$ in I.

Allora f è continua in I.

DIM

Voglio mostrare che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

cioè che $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ t.c.

$\forall x$ con $|x - x_0| < \delta$ si ha

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ in corrispondenza di x_0.

Osserviamo che per questo ε fissato abbiamo, per la convergenza uniforme,

$\exists \bar{K}(\varepsilon)$ t.c. $|f_K(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\forall x \in I$
$\forall k > \bar{k}$

Scegliamo ora $k_0 > \bar{k}$ e consideriamo

$$|f(x) - f(x_0)|$$

si ha:

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_{k_0}(x) + f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0) + f_{k_0}(x_0) - f(x_0)| \leq$$

$$\leq |f(x) - f_{k_0}(x)| + |f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)| + |f_{k_0}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

Pertanto

$$|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon$$

con $|x - x_0| < \delta \quad \forall x$

$\blacksquare$

7. Teorema sullo scambio dei limiti

domenica 19 dicembre 2021 22:12

Sia $f_K : I \subseteq R \to R$ una successione di funzioni convergente uniformemente in I. Supponiamo che $\forall K \in N$ esista

$$\lim_{x \to x_0} f_K(x)$$

Allora esistono entrambi i seguenti limiti e sono fra loro uguali:

$$\lim_{K \to +\infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_K(x) \right) \quad e \quad \lim_{x \to x_0} \left(\lim_{K \to +\infty} f_K(x) \right)$$

DIM

Denotiamo con $l_K \overset{def}{=} \lim_{x \to x_0} f_K(x)$

// // $f(x) \overset{def}{=} \lim_{K \to +\infty} f_K(x)$

Vogliamo mostrare che:

Vogliamo mostrare che:

$$\lim_{k\to+\infty} l_k = \lim_{x\to x_0} f(x)$$

ma prima dobbiamo vedere che tali limiti esistono:

- Mostriamo che la successione numerica $\{l_k\}$ è convergente in $\mathbb{R}$.

Per Analisi 1 sappiamo che:

$\{l_k\}$ è convergente $\iff$ è di Cauchy

Dimostriamo allora che è di Cauchy:

Fissiamo $\varepsilon>0$ e consideriamo la quantità

$$|l_k - l_h|$$

Vogliamo mostrare che

$$|l_k - l_h| < \varepsilon$$ per h,k sufficientemente grandi

Allora consideriamo quindi

$$|f_k(x) - f_h(x)|$$

Ora:

$$|f_k(x) - f_h(x)| = |f_k(x) - f(x) + f(x) - f_h(x)|$$

$$< |f_k(x) - f(x)| + |f(x) - f_h(x)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \quad \forall k, h > \bar{n} \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I$$

DISUG. TRIANG.

CONVERG. UNIF

Pertanto:

$$0 \leq |f_k(x) - f_h(x)| < 2\varepsilon$$

Passiamo ora al limite per $x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} |f_k(x) - f_h(x)| = \left| \lim_{x \to x_0} (f_k(x) - f_h(x)) \right|$$

Sì, perché la funzione modulo è continua

Vuol dire che:

$$0 \leq |l_k - l_h| < 2\varepsilon \quad \forall k, h > \bar{n} \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ la successione è di Cauchy e

$\Rightarrow$ la successione è di Cauchy e quindi converge

Sia $l \overset{def}{=} \lim_{x \to x_0} l_K$

Resta da mostrare che $\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{K \to +\infty} f_K(x) \right)$ esiste ed è uguale a l

Ossia vogliamo mostrare che:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon, x_0)$

t.c. $\forall x$ con $0 < |x - x_0| < \delta$

si ha $|f(x) - l| < \varepsilon$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e consideriamo la quantità

$|f(x) - l|$

Per la convergenza uniforme possiamo scegliere k_0 sufficientemente grande tale che tale che

$$|f_{k_0}(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I$$

e, dato che $\lim_{x \to x_0} f_{k_0}(x) = l_{k_0}$, prendiamo δ_0 sufficientemente piccolo tale che

$$|f_{k_0}(x) - l_{k_0}| < \varepsilon \quad \forall x \text{ t.c. } 0 < |x - x_0| < \delta_0$$

Ora sappiamo che $|l_k - l| < \varepsilon \quad \forall k > \bar{n}$

Pertanto scegliamo k_0 sufficientemente grande in modo che le condizioni per la convergenza uniforme e la convergenza della successione numerica valgano per lo stesso ε

Quindi si ha:

$$|f(x) - l| = |f(x) - f_{k_0}(x) + f_{k_0}(x) - l_{k_0} + l_{k_0} - l| <$$

$$< |f(x) - f_{k_0}(x)| + |f_{k_0}(x) - l_{k_0}| + |l_{k_0} - l| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

$\forall x$ con $0 < |x - x_0| < \delta_0$

Per cui si ha:

Per cui si ha:

$\forall x$ con $0 < |x - x_0| < \delta_0$

$$\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{k \to +\infty} f_k(x) \right) = \lim_{k \to +\infty} \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right)$$

$\square$

8.. Teorema sul criterio di Cauchy uniforme

lunedì 20 dicembre 2021 19:02

Si ha che:

$$f_k \xrightarrow{u} f \text{ in } I \subseteq \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ t.c. } |f_k(x) - f_h(x)| < \varepsilon \quad \forall h, k > \bar{n} \quad \forall x \in I$$

<u>DIM</u>

$\Rightarrow$): Sia $f_k \xrightarrow{u} f$ in $I \subseteq \mathbb{R}$.

Questo vuol dire che

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall k > \bar{n} \quad \forall x \in I$$

Fissiamo allora $\varepsilon > 0$ e consideriamo

$$|f_k(x) - f_h(x)|$$

Si ha:

$$|f_k(x) - f_h(x)| = |f_k(x) - f(x) + f(x) - f_h(x)| <$$

$$< |f_k(x) - f(x)| + |f(x) - f_h(x)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \quad \forall h, k > \bar{n} \quad \forall x \in I$$

$\Leftarrow$): Sia $\{f_k\}$ di Cauchy uniforme in I.

Sappiamo che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c.

Sappiamo che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{m} \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|f_k(x) - f_h(x)| < \varepsilon \qquad \forall h,k > \bar{m} \quad \forall x \in I$$

Fissiamo allora $\varepsilon > 0$ e consideriamo la quantità

$$|f_k(x) - f_h(x)|$$

Ora

$$|f_k(x) - f_h(x)| < \varepsilon \qquad \forall h,k > \bar{m} \quad \forall x \in I$$

Passiamo dunque al limite per $h \to +\infty$

$$\lim_{h \to +\infty} |f_k(x) - f_h(x)| = \left|\lim_{h \to +\infty} (f_k(x) - f_h(x))\right| =$$

$$= \left|f_k(x) - \lim_{h \to +\infty} f_h(x)\right|$$

Osserviamo che per x fissato, la successione numerica $\{f_k(x)\}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ e pertanto possiede limite $\forall x \in I$

Sia dunque

$$f(x) \overset{def}{=} \lim_{h \to +\infty} f_h(x)$$

Pertanto l...

Pertanto si ha:

$$\lim_{h\to+\infty} |f_K(x)-f_h(x)| = |f_K(x) - \lim_{h\to+\infty} f_h(x)| =$$

$$= |f_K(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in I \quad \forall K > \bar{n}$$

$$\Rightarrow f_K(x) \xrightarrow{U} f(x) \text{ in } I$$

9. Teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale

lunedì 20 dicembre 2021 19:19

Sia f_k una successione di funzioni continue t.c.

$f_k \xrightarrow{u} f$ in $[a,b]$

Allora

$$\lim_{k\to+\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx = \int_a^b \lim_{k\to+\infty} f_k(x)\,dx$$

DIM

Osserviamo che, dato che $f_k \xrightarrow{u} f$ in $[a,b]$ e le f_k sono continue, si ha f continua

Osserviamo inoltre che la funzione f e le f_k sono R-integrabili in $[a,b]$, in quanto funzioni continue siano funzioni continue

Fissiamo $\varepsilon>0$ e consideriamo la quantità:

$$\left| \int_a^b f_k(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b \left(f_k(x)-f(x)\right) dx \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b \left| f_k(x) - f(x) \right| dx \leq (b-a) \cdot \sup_{x\in[a,b]} \left| f_k(x) - f(x) \right|$$

$$\leq (b-a) \cdot \varepsilon$$ definitivamente

$\blacksquare$

10. Teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata

lunedì 20 dicembre 2021 19:34

Sia $\{f_K\}$ una successione di funzioni derivabili con derivata continua in $[a,b]$.

Supponiamo che $\exists x_0 \in [a,b]$ t.c. la successione numerica $\{f_K(x_0)\}$ converge in R e che la successione $\{f_K'\}$ converge uniformemente in $[a,b]$.

Allora $\{f_K\}$ converge uniformemente ad una funzione f derivabile, con derivata continua, e si ha che:

$$\lim_{K\to+\infty} f_K'(x) = f'(x) = \left(\lim_{K\to+\infty} f_K(x)\right)'$$

$k \to +\infty$ ... $k \to +\infty$

DIM

Osserviamo che, per la continuità del limite, si ha che le f'_k <u>convergono uniformemente</u> ad una funzione continua in $[a,b]$; chiamiamo g tale funzione.

Inoltre, sia $l \overset{def}{=} \lim\limits_{k\to+\infty} f_k(x_0)$

Per il Teorema fondamentale del calcolo integrale si ha che:

$$f_k(x) = f_k(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'_k(t)\, dt$$

Notiamo che:

Notiamo che:

$$\lim_{k\to+\infty} f_k(x) = \lim_{k\to+\infty} \left(f_k(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_k'(t)\,dt \right) =$$

$$= l + \lim_{k\to+\infty} \int_{x_0}^{x} f_k'(t)\,dt = l + \int_{x_0}^{x} \lim_{k\to+\infty} f_k'(t)\,dt =$$

$$= l + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$$

Quindi:

$$f_k \xrightarrow{P} f \quad \text{in } [a,b]$$

dove $f(x) = l + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$

Mostriamo ora che $f_k \xrightarrow{U} f$ in $[a,b]$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e consideriamo la quantità

$$|f_k(x) - f(x)|$$

Per cui si ha:

$$|f_K(x) - f(x)| = \left| f_K(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'_K(t)\,dt - l - \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \right| \le$$

$$\le |f_K(x_0) - l| + \left| \int_{x_0}^{x} f'_K(t) - g(t)\,dt \right| \le$$

$$\le |f_K(x_0) - l| + |x - x_0| \cdot \sup_{x \in [a,b]} |f'_K(x) - g(x)| \le$$

$$\le |f_K(x_0) - l| + (b - a) \cdot \sup_{x \in [a,b]} |f'_K(x) - g(x)| \le$$

$$\le \varepsilon + (b - a) \cdot \varepsilon$$ <u>definitivamente</u>

$$\Rightarrow f_K \xrightarrow{u} f \text{ in } [a, b]$$

Ora notiamo che:

$$f(x) = l + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$$

è derivabile (per il teorema

è derivabile (per il Teorema fondamentale del calcolo integrale) e si ha che

$$f'(x) = g(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

$\Rightarrow$ f' è continua perché g è continua.

Inoltre

$$\lim_{k \to +\infty} f_k'(x) = g(x) = f'(x) = \left(\lim_{k \to +\infty} f_k(x) \right)'$$

$\blacksquare$

11.. Teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata sotto ipotesi generali (dimostrazione facoltativa)

lunedì 20 dicembre 2021 21:17

Sia f_K una successione di funzioni derivabili in $[a, b]$.

Supponiamo che esista $x_0 \in [a, b]$ tale che la successione numerica $\{f_K(x_0)\}$ sia convergente in $\mathbb{R}$ e che la successione $\{f_K'\}$ converga uniformemente in $[a, b]$.

Allora $\{f_K\}$ converge uniformemente in $[a, b]$ verso una funzione f derivabile in $[a, b]$ e si ha:

$$f'(x) = \lim_{K \to +\infty} f_K'(x)$$

$k \to +\infty$

DIM

La dimostrazione è facoltativa e si basa sui due seguenti lemmi:

LEMMA 1:

Sia $\{f_k\}$ una successione di funzioni derivabili in un intervallo chiuso $[a,b]$.

Supponiamo che $\exists\, x_0 \in [a,b]$ t.c. $\{f_k(x_0)\}$ converga in $\mathbb{R}$ e che le derivate $\{f'_k\}$ convergano uniformemente in $[a,b]$.

Allora $\{f_k\}$ converge uniformemente in $[a,b]$.

LEMMA 2

Sia $\{f_k\}$ una successione di funzioni derivabili in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$.

Sia
$$g_k(x) = \frac{f_k(x) - f_k(x_0)}{x - x_0} \quad \forall x \in [a,b] \setminus \{x_0\}$$

Se $\{f'_k\}$ converge uniformemente in $[a,b]$, allora anche $\{g_k\}$ converge uniformemente in $[a,b] \setminus \{x_0\}$

$\blacksquare$

12. Teorema del Dini sulla convergenza uniforme sotto ipotesi di monotonia

lunedì 20 dicembre 2021 21:41

Sia $I = [a,b]$ e sia $f_k : I \to R$ una successione di funzioni continue monotona rispetto a k, con

$$f_k \xrightarrow{p} f \quad \text{in } [a,b]$$

con f continua.

Allora

$$f_k \xrightarrow{u} f \quad \text{in } [a,b]$$

DIM

Mostriamo il caso $f_k \uparrow f$ in $[a,b]$

Supponiamo per assurdo che

$$f_k \not\xrightarrow{u} f \quad \text{in } [a,b]$$

Ciò significa (equivalentemente)

che

$\exists\, \varepsilon_0 > 0$ ed esistono $\{f_{k_h}\}$ e $\{x_{k_h}\}$ con $\{f_{k_h}\} \subseteq \{f_k\}$ e $\{x_{k_h}\} \subseteq \{x_k\} \subset I$ t.c.

$$|f_{k_h}(x_{k_h}) - f(x_{k_h})| \geq \varepsilon_0$$

Ora dato che $f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \quad \forall k \in N \quad \forall x \in I$

si ha che:

$$f_k(x) \leq f(x) \qquad \forall x \in I \quad \forall k \in N$$

Ora $f(x_{k_h}) - f_{k_h}(x_{k_h}) \geq \varepsilon_0$

Ricordiamo che $\{x_{k_h}\} \subset [a,b]$.

Per il teo di Bolzano-Weierstrass,

Per il teo di Bolzano-Weierstrass,

$\exists$ una successione estratta che indichiamo con $\{x_{k_h}\}$ t.c.

$$x_{k_h} \to x_0 \in I$$

Consideriamo ora

$$f(x_{k_h}) - f_{k_h}(x_{k_h})$$

Si ha $f_j(x) \leq f_{k_h}(x) \quad \forall j \leq k_h$
$\forall x \in [a,b]$

Allora avrò:

$$f(x_{k_h}) - f_j(x_{k_h}) \geq \varepsilon_0$$

Facendo tendere $x_{k_h} \to x_0$, avremo che:

$$\lim_{x_{k_h} \to x_0} f(x_{k_h}) - f_j(x_{k_h}) = f(x_0) - f_j(x_0) = 0$$

Per la convergenza puntuale in termini di ε avrò:

$$\varepsilon > |f(x_0) - f_J(x_0)| \geq \varepsilon_0$$

ASSURDO

13. Convergenza uniforme sotto ipotesi di monotonia rispetto al punto

lunedì 20 dicembre 2021 22:00

Sia $\{f_k\}$ una successione di funzioni crescenti (o decrescenti) rispetto ad $x \in [a,b]$ t.c.

$$f_k \xrightarrow{P} f \quad \text{in } [a,b]$$

con f continua.

Allora f è crescente (o decrescente) e $f_k \xrightarrow{U} f$ in $[a,b]$

DIM

Mostriamo il caso crescente (quello decrescente è similare).

Dato che le f_k sono crescenti si ha:

$$f_k(x) \leq f_k(y) \quad \forall x,y \in [a,b] \text{ con } x \leq y$$

con $x \le y$

Dovremmo mostrare la convergenza uniforme di f, cioè che preso $\varepsilon > 0$ si ha:

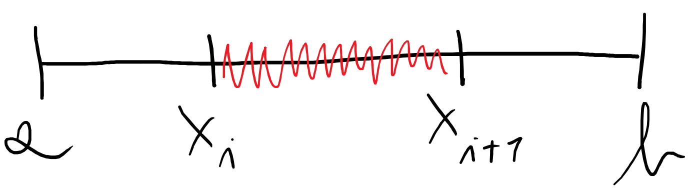
$$\sup_{x \in [a,b]} |f_k - f| < \varepsilon \quad \text{definitivamente}$$

Osserviamo che passando al limite per $k \to +\infty$ in

$$f_k(x) \le f_k(y) \quad \forall x,y \in [a,b] \text{ con } x \le y$$

si ha che anche f è monotona crescente.

Consideriamo l'intervallo



(Possiamo suddividere l'intervallo $[a,b]$ in h sottointervalli della stessa lunghezza, cioè $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{h-1} < x_h = b$)

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e scegliamo h sufficientemente grande in modo che

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in [x_i, x_{i+1}]$$
$$\forall i = 0, \dots, h-1$$

Consideriamo ora

$$|f_k(x) - f(x)| \quad \text{con } x \in [x_i, x_{i+1}]$$

Ora $f_k(x_i) \leq f_k(x) \leq f_k(x_{i+1})$

Possiamo ora sfruttare la convergenza puntuale:

$$\lim_{k \to +\infty} f_k(x_i) = f(x_i) \quad \forall i \in \{0, .., h-1\}$$

$$\Rightarrow \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ t.c.}$$

$$|f_k(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon \quad \forall i = 0, .., h$$

Sia $\bar{n} = \max\{n_i\}$ e $k > \bar{n}$

Ora

$\forall x \in [x_i, x_{i+1}]$ si ha:

$$f_k(x) - f(x) \leq f_k(x_{i+1}) - f(x) \leq$$

$$\leq \overbrace{f_k(x_{i+1}) - f(x_{i+1})}^{< \varepsilon \text{ (conv puntuale)}} + \overbrace{f(x_{i+1}) - f(x)}^{< \varepsilon \text{ (Heine-Cantor)}} <$$

$$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

definitivamente

In maniera similare:

$$f(x)-f_K(x) \leq f(x)-f_K(x_i) \leq$$

$$\leq f(x)-f(x_i)+f(x_i)-f_K(x_i) < 2\varepsilon$$

Abbiamo dunque:

$$|f_K(x)-f(x)| < \varepsilon$$ definitivamente $\forall x \in [0,1]$

$\blacksquare$

14.. Convergenza puntuale ed uniforme di una serie di funzioni

giovedì 23 dicembre 2021 16:02

Se accade che

$\exists f: I \subseteq R \rightarrow R$ t.c.

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} S_n(x) \quad \forall x \in I$$

Allora diremo che la serie di funzioni $\{S_n\}$ associata alla successione di funzioni $\{f_n\}$ converge puntualmente ad f.

In alternativa diremo che f è la somma della serie $\{S_n\}$ e scriveremo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

$\blacksquare$

15. Convergenza totale di una serie di funzioni

giovedì 23 dicembre 2021 16:16

Diremo che la serie di funzioni $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ è

<u>totalmente convergente</u> in I

se accade che:

successione

$$\exists \{M_k\} \subseteq \mathbb{R} \text{ t.c.}$$

$$|f_k(x)| \le M_k \quad \forall x \in I \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Inoltre, la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} M_k < +\infty$

$\blacksquare$

16. Criteri di Cauchy puntuale ed uniforme per la convergenza di una serie di funzioni

giovedì 23 dicembre 2021 16:21

- <u>Criterio di Cauchy puntuale</u>:

La serie di termine generale f_K converge puntualmente in I se:

$\forall \varepsilon > 0$ e $\forall x \in I$ $\exists \bar{n}(\varepsilon, x) \in N$ t.c.

$$|f_{K+1}(x) + \dots + f_{K+p}(x)| < \varepsilon \qquad \forall K > \bar{n}, \ \forall p \in N$$

- <u>Criterio di Cauchy uniforme</u>:

La serie di termine generale f_K <u>converge uniformemente</u> in I se:

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \bar{n}(\varepsilon)$ t.c.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \, \bar{m}(\varepsilon)$ t.c.

$$\left| f_{k+1}(x) + \dots + f_{k+p}(x) \right| < \varepsilon \qquad \begin{array}{l} \forall k > \bar{m} \\ \forall p \in \mathbb{N} \\ \forall x \in I \end{array}$$

$\blacksquare$

17.. Relazione fra la convergenza totale, uniforme e puntuale di una serie di funzioni

giovedì 23 dicembre 2021 16:34

La convergenza totale di una serie di funzioni implica la sua convergenza uniforme e dunque la sua convergenza puntuale.

Cioè, vale il seguente schema:

convergenza totale $\Rightarrow$ convergenza uniforme $\Rightarrow$ convergenza puntuale

DIM

Sia $f_1 + f_2 + \dots + f_K + \dots$

una serie di funzioni che

converge totalmente in I.

Sia $M_1 + M_2 + \dots + M_k + \dots$ una serie numerica a termini non negativi, convergente e tale che

$$|f_k(x)| \leq M_k \qquad \forall x \in I \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Per il criterio di Cauchy relativo alle serie numeriche, si ha:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c.

$$M_{k+1} + \dots + M_{k+p} < \varepsilon \qquad \forall k > \bar{n} \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

Ne segue che:

$$|f_{k+1}(x) + \dots + f_{k+p}(x)| \leq$$

$$\leq |f_{k+1}(x)| + \dots + |f_{k+p}(x)| \leq$$

$$\leq M_{k+1} + \dots + M_{k+p} < \varepsilon$$

$\forall k > \bar{m}$
$\forall p \in N$
$\forall x \in I$

Perciò la serie di termine generale f_k soddisfa il criterio di Cauchy uniforme per le serie e quindi converge uniformemente in I.

$\blacksquare$

18. Teorema sulla continuità di una somma di una serie di funzioni

giovedì 23 dicembre 2021 16:47

La somma di una serie di funzioni continue convergente uniformemente è anch'essa una funzione continua

DIM

Basta osservare che il limite uniforme di funzioni continue è continuo (per il teorema di continuità del limite).

$S_1 = f_1$

$S_2 = f_1 + f_2$

$\vdots$

$$S_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$$

(Tutte le S_K sono continue perché somme di funzioni continue)

Dunque poiché $S_n \xrightarrow{U} f$

$\Rightarrow$ f è continua

$\blacksquare$

19. Teorema sull'integrazione di una serie di funzioni

giovedì 23 dicembre 2021 16:55

Sia $\{f_K\}$ una successione di funzioni continue in $[a, b]$ e supponiamo che la serie:

$$\sum_{K=1}^{+\infty} f_K \xrightarrow{U} f \quad \text{in } [a, b]$$

Allora

$$\int_a^b \sum_{K=1}^{+\infty} f_K(x)\, dx = \sum_{K=1}^{+\infty} \int_a^b f_K(x)\, dx$$

<u>DIM</u>

Conseguenza del <u>teorema di passaggio al limite sotto</u>

il segno di integrale (*n.g*)

20.. Teorema di derivazione per le serie di funzioni

venerdì 24 dicembre 2021 16:11

Sia $\{f_K\}$ una successione di funzioni derivabili, con derivata continua in $[a,b]$.

Se $\sum_{K=1}^{+\infty} f_K$ converge in $[a,b]$ verso f, allora f è derivabile con derivata continua e risulta

$$\left(\sum_{K=1}^{+\infty} f_K(x)\right)' = \sum_{K=1}^{+\infty} f_K'(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

purché la serie delle derivate converga uniformemente

DIM

Segue dal teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata (*n.70*)

$\blacksquare$

21. Serie di potenze

venerdì 24 dicembre 2021 16:28

Sia $\{a_K\}$ una successione di numeri reali, con $K = 0, 1, 2, \dots$

La seguente serie di funzioni

$$\sum_{K=0}^{+\infty} a_K X^K$$

è detta <u>serie di potenze</u> con coefficienti $a_K \in \mathbb{R}$

<u>OSS</u>

Possono verificarsi 3 casi:

(1) $\sum_{K=0}^{+\infty} a_K \cdot X^K$ converge solo per $X = 0$

$k=0$

(2) $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$

(3) $\exists \rho \in \mathbb{R}, \rho > 0$ t.c. la

serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$

converge se $|x| < \rho$ e

non converge se $|x| > \rho$

<u>Lemma di Abel</u>:

Se la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$

converge in $\xi \neq 0$, allo

converge per $\xi \neq 0$, allora converge totalmente in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in $(-|\xi|, |\xi|)$

DIM

Osserviamo che la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \xi^k$$

converge per ipotesi

Dunque $\exists L \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|a_k \xi^k| \leq L \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

[illegible]

Sia ora $x \in [-|\eta|, |\eta|]$

dove $|\eta| < |\xi|$

Mostriamo che la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

converge assolutamente;

Consideriamo dunque

$$|a_k x^k|$$

con $\quad -|\xi| < -|\eta| \leq x \leq |\eta| < |\xi|$

Si ha:

$$|a_k x^k| = \left| a_k \cdot x^k \cdot \frac{\xi^k}{\xi^k} \right| =$$

$$= \left| a_k \cdot \xi^k \cdot \left(\frac{x}{\xi}\right)^k \right| \leq |a_k \cdot \xi^k| \cdot \left| \left(\frac{x}{\xi}\right)^k \right| \leq$$

$$= \left| a_k \cdot \xi^k \cdot \left(\frac{x}{\xi}\right)^k \right| \leq \left| a_k \xi^k \right| \cdot \left| \left(\frac{x}{\xi}\right)^k \right| \leq$$

$$\leq L \cdot \left| \frac{x}{\xi} \right|^k \leq L \cdot \left| \frac{\eta}{\xi} \right|^k$$

Osserviamo che:

$$\left| \frac{\eta}{\xi} \right| < 1$$

pertanto la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left| \frac{\eta}{\xi} \right|^k < +\infty \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum \left| a_k x^k \right| \leq L \cdot \sum \left| \frac{\eta}{\xi} \right|^k < +\infty$$

$$\forall x \in [-|\eta|, |\eta|]$$

$\Rightarrow$ La serie di potenze

Converge totalmente in

$[-|r|, |r|]$

$\blacksquare$

22. Raggio di convergenza delle serie di potenze

venerdì 24 dicembre 2021 16:36

Chiameremo **raggio di convergenza**:

$$\rho \overset{def}{=} \sup_{x \in \mathbb{R}} X$$

dove $X \overset{def}{=} \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \text{ converge} \right\}$

23.. Teoremi sul raggio di convergenza

venerdì 24 dicembre 2021 16:59

Sia $0 < \rho < +\infty$

La serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ ha

raggio di convergenza $\rho \iff$

converge per $|x| < \rho$ e

non converge per $|x| > \rho$

DIM

$\Rightarrow$): Supponiamo che il raggio

di convergenza sia ρ.

Sia quindi $x \in \mathbb{R}$ con

$|x| < \rho$.

Per definizione di sup $\exists\, \xi > 0 \in X$

t.c. $|x| < \xi < \rho$

t.c. $|x| < \xi < \rho$

LEMMA DI ABEL $\Longrightarrow$ la serie converge totalmente in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in $(-|\xi|, |\xi|)$ cioè anche in x.

Supponiamo ora, per assurdo, che la serie converga per $|x| > \rho$. Per il Teorema di Abel ho che la serie converge totalmente in ogni sottointervallo chiuso e dato contenuto in $(-|x|, |x|)$, contro l'ipotesi che ρ sia un sup non sup

$\Leftarrow$): Viceversa supponiamo che la serie converga per $|x|<\rho$ e non converga per $|x|>\rho$.

Dato che la serie converge per $|x|<\rho$, X contiene l'intervallo $(-\rho,\rho)$.

(Ricordiamo che $X \overset{def}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \text{ converge}\}$)

Supp che $\exists\ \rho_1 \geq \rho$, deve essere necessariamente $\rho < \rho$

essere necessariamente $\rho \leq \rho_1$

e non può essere $\rho < \rho_1$

perché altrimenti si avrebbe che la serie converge nell'intervallo $[\rho, \rho_1)$ contro l'ipotesi che per $|x| > \rho$ la serie non converge

$\blacksquare$

24. Criterio di Cauchy-Hadamard

sabato 25 dicembre 2021 00:34

Data la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$, se $\exists \lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = l$ si ha che il raggio di convergenza della serie è dato da:

$$\rho = \begin{cases} +\infty & \text{se } l = 0 \\ 1/l & \text{se } 0 < l < +\infty \\ 0 & \text{se } l = +\infty \end{cases}$$

DIM

Per il criterio della radice di Analisi 1, possiamo affermare che per $x \neq 0$:

- $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n < +\infty$
- $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = +\infty$

Calcoliamo allora il limite:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n||x|^n} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \sqrt[n]{|x|^n} =$$
$$= l \cdot |x|$$

$\Rightarrow$

- se $l = 0$ allora $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = l \cdot |x| = 0 < 1 \Rightarrow$ la serie di potenze converge

- se $l = 0$ allora $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = l \cdot |x| = 0 < 1 \Rightarrow$ la serie di potenze converge $\forall x \in \mathbb{R}$ $\iff \rho = +\infty$

- se $0 < l < +\infty$ allora $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = l \cdot |x| \Rightarrow$ la serie di potenze converge per $l \cdot |x| < 1$ e diverge per $l \cdot |x| > 1$

  cioè converge per $|x| < \frac{1}{l}$ e
  non converge per $|x| > \frac{1}{l}$ $\Bigg\} \iff \rho = \frac{1}{l}$

- se $l = +\infty$ allora $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = l \cdot |x| = +\infty \Rightarrow$

  $\Rightarrow$ la serie di potenze diverge $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, cioè converge solo in $0 \iff \rho = 0$

25. Criterio di D'Alambert

sabato 25 dicembre 2021 00:47

Data la serie di potenze $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$, con $a_k \neq 0$, se $\exists \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = l$, allora il raggio di convergenza della serie è dato da:

$$\rho = \begin{cases} +\infty & \text{se } l = 0 \\ 1/l & \text{se } 0 < l < +\infty \\ 0 & \text{se } l = +\infty \end{cases}$$

DIM

Per il criterio del rapporto di Analisi 1, possiamo affermare che:

- $\lim_{k \to +\infty} \left| \frac{a_{k+1} x^{k+1}}{a_k x^k} \right| < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k < +\infty$

- $\lim_{k \to +\infty} \left| \frac{a_{k+1} x^{k+1}}{a_k x^k} \right| > 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = +\infty$

Calcoliamo allora il limite:

$$L \overset{def}{=} \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{a_{k+1} x^{k+1}}{a_k x^k} \right| = \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{a_{k+1} \cdot x}{a_k} \right| = \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \cdot |x| = l \cdot |x|$$

$\Rightarrow$

- se $l = 0$, si ha $L < 1$, cioè la serie converge $\forall x \in R$ quindi $\rho = +\infty$

- se $0 < l < +\infty$, si ha $L \in R$, cioè la serie converge

- se $0 < l < +\infty$, si ha $L \in \mathbb{R}$, cioè la serie converge per $L = l \cdot |x| < 1$ e diverge per $L = l \cdot |x| > 1$, ossia la serie converge per $|x| < \frac{1}{l}$ e non converge per $|x| > \frac{1}{l}$

  quindi $\rho = 1/l$

- se $l = +\infty$, si ha $L = +\infty$ quindi la serie non converge $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, cioè converge solo in 0

  quindi $\rho = 0$

26.. Teorema sul raggio di convergenza della serie derivata

sabato 25 dicembre 2021 16:13

Una serie di potenze ha lo stesso raggio di convergenza della sua serie derivata.

DIM

Denotiamo con ρ il raggio di convergenza di $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$
e denotiamo con ρ' il raggio di convergenza di $\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}$

Mostriamo per prima cosa che se la serie converge in un punto $x_0 \neq 0$, allora la sua serie derivata converge per gli x con $|x| < |x_0|$, e pertanto risulterà $\rho' \geq \rho$

Sappiamo che la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x_0^k$ converge. Vogliamo mostrare che la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}$ converge.

Ora, per la convergenza della serie di potenze in x_0 si ha che $|a_k x_0^k| < L \quad \forall k \in N$

Consideriamo la quantità
$$|k \cdot a_k x^{k-1}|$$

si ha
$$|k \cdot a_k x^{k-1}| \leq \left|k \cdot a_k \cdot x^{k-1} \cdot \frac{x_0^k}{x_0^k}\right| \leq \left|k \cdot a_k \cdot x_0^k \cdot \frac{x^{k-1}}{x_0^k}\right| \leq k \cdot \frac{L}{|x_0|} \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^{k-1}$$

Dato che la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \frac{L}{|x_0|} \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^{k-1}$ converge (PER IL CRITERIO DELLA RADICE), si ha che anche la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}$ converge

Mostriamo ora che $\rho \geq \rho'$:
fissiamo $x_1 \neq 0$ con $|x_1| < \rho'$ e verifichiamo che la serie
$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ converge per $|x| < |x_1|$

In maniera similare a quanto visto prima si avrà che
$\exists M \in R$ t.c. $|k \cdot a_k \cdot x_1^{k-1}| \leq M \quad \forall k \in N$
Ora, consideriamo la quantità

Ora, consideriamo la quantità

$$|a_k x^k|$$

si ha

$$|a_k x^k| \leq \left|a_k \cdot x^k \cdot \frac{x_1^{k-1}}{x_1^{k-1}} \cdot \frac{k}{k}\right| \leq \left|k\, a_k\, x_1^{k-1} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{x_1^{k-1}} \cdot x^{k-1} \cdot x\right| \leq M \cdot \frac{1}{k} \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^{k-1} \cdot |x| \leq M \cdot \frac{1}{k} \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^{k-1} \cdot |x_1|$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k x^k| < +\infty \Longrightarrow \rho \geq \rho'$$

In conclusione

$$\rho = \rho'$$

$\blacksquare$

27. Teorema di derivazione ed integrazione delle serie di potenze

sabato 25 dicembre 2021 16:46

Se la serie di potenze $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ ha raggio di convergenza non nullo e se $f(x)$ è la sua somma, ossia
$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \quad \forall x$ con $|x| < \rho$ e $\rho > 0$, allora risulta anche

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot a_k x^{k-1}$$

e

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$$

DIM

Osserviamo che le tre serie di potenze hanno tutte lo stesso raggio di convergenza, poiché una è la derivata dell'altra:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k x^{k+1}}{k+1} \longrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \longrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot a_k \cdot x^{k-1}$$

e quindi vale il teorema del raggio di convergenza della serie derivata.

(Avendo noi la convergenza uniforme, il risultato segue dai teoremi:
- Teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata
- Teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale
- Teorema della continuità della funzione limite)

$\blacksquare$

28. Serie di Taylor

sabato 25 dicembre 2021 16:59

Sia $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a,b)$.

É detta serie di Taylor una serie di potenze centrata in x_0, la cui somma è f.

(Analogamente lo sviluppo in serie di f in un intorno di x_0 è detta serie di Taylor)

$\boxed{/\!\!/}$

29.. Teoremi sulla convergenza della serie di Taylor e la sviluppabilità

sabato 25 dicembre 2021 17:05

Se la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k$$

ha raggio di convergenza $\rho>0$, la sua somma $f(x)$ è una funzione derivabile infinite volte per $|x-x_0|<\rho$ e $\forall m \in \mathbb{N}$ la derivata m-esima (o di ordine m) di f vale:

$$f^{m}(x)=\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)(k-2)\dots(k-(m-1))\cdot a_k\cdot(x-x_0)^{k-m}$$

Inoltre f è sviluppabile nella forma:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{k}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

DIM

Osserviamo che f è derivabile infinite volte per i teoremi sulla derivazione delle serie

$$f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k \qquad \text{per } |x-x_0|<\rho$$

Possiamo osservare altri due fatti:

a) $f^{(m)}(x)=\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)(k-2)\dots(k-(m-1))\cdot a_k(x-x_0)^{k-m}$ si ottiene grazie alla

a) $f^{(m)}(x) = \sum_{k=1} k(k-1)(k-2)\dots(k-(m-1))\cdot a_k(x-x_0)^{k-m}$ si ottiene grazie alla derivazione termine a termine della serie

b) Sostituendo $x=x_0$ in $f^{(m)}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)(k-2)\dots(k-(m-1))\cdot a_k(x-x_0)^{k-m}$ si cancellano tutti i termini tranne quando $k=m$, dato che

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)(k-2)\dots(k-(m-1))\cdot a_k(x-x_0)^{k-m} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow f^{(m)}(x_0) = m(m-1)(m-2)\dots(m-m+1)\cdot a_m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{(m)}(x_0) = m(m-1)(m-2)\dots(1)\cdot a_m$$ da cui

$$a_m = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}$$

da cui si ha:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{k}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

30. Funzioni periodiche

sabato 25 dicembre 2021 17:22

Sia $f: R \to R$. Diremo che f è periodica di periodo T se accade che

$$f(x+T) = f(x) \qquad \forall x \in R$$

31. Introduzione alle serie di Fourier

sabato 25 dicembre 2021 17:28

La seguente serie

$$S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} a_k \cdot \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx) \qquad m \in \mathbb{N}$$

è detta serie di Fourier.

Inoltre, il polinomio trigonometrico $S_m(x)$ è periodico di periodo 2π.

Calcoliamo ora il coefficiente a_0:

ci basta integrare $f(x)$ tra $-\pi$ e π, dove $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{m} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)}_{0} =$$

$$= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi = \pi \cdot a_0$$

Da cui:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

Per calcolare a_k, b_k basta moltiplicare $f(x)$ per $\cos(kx)$ o $\sin(kx)$ e integrare tra $-\pi$ e π:

- $a_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(kx)\,dx$
- $b_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(kx)\,dx$

Infine si ha che:

- Se f è pari $\Rightarrow b_k = 0 \Rightarrow$ sviluppo in serie di Fourier in soli coseni
- Se f è dispari $\Rightarrow a_k = 0 \Rightarrow$ sviluppo in serie di Fourier in soli seni

Più in generale si ha:

- $$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, dx$$

- $$a_k = \frac{2}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot kx\right) dx$$

- $$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) dx$$

32.. Teorema sulla convergenza puntuale della serie di Fourier (senza dimostrazione)

domenica 26 dicembre 2021 23:38

Sia f periodica, di periodo 2π, regolare a tratti su R.

Allora $\forall x \in R$ la serie di Fourier converge a

$$\frac{1}{2}\left[f(x+) + f(x-)\right]$$

Cioè alla media tra il limite destro e sinistro in x. ▨

[f è <u>regolare a tratti</u> in $[a,b]$ se $\exists$ una partizione di un numero finito di x_i, $i=0,\dots,n$, t.c. f è derivabile in (x_{i-1}, x_i) ed è prolungabile con continuità a $[x_{i-1}, x_i]$ $\forall i=1,\dots,N$]

33. Teorema sulla integrazione termine a termine della serie di Fourier (senza dimostrazione)

lunedì 27 dicembre 2021 10:40

Sia f una funzione periodica, di periodo 2π, regolare a tratti.
Fissato $x_0, x \in [-\pi, \pi]$ vale la formula:

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \frac{a_0}{2}(x - x_0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{x_0}^{x} \left[a_k \cdot \cos(kt) + b_k \sin(kt)\right] dt$$

34. Diseguaglianza di Bessel (senza dimostrazione)

lunedì 27 dicembre 2021 10:45

Sia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ limitata ed integrabile.
Se S_n è la somma parziale n-esima della serie di Fourier associata ad f, si ha:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2 \, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right)$$

ed inoltre

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx$$

$\blacksquare$

35.. Teorema sulla convergenza uniforme della serie di Fourier (senza dimostrazione)

lunedì 27 dicembre 2021 10:52

Sia f una funzione periodica, di periodo 2π, regolare a tratti e continua in $\mathbb{R}$.

Allora la serie di Fourier converge totalmente in $\mathbb{R}$ alla funzione f.

[Sia f una funzione periodica, di periodo 2π, regolare a tratti.
Allora la serie di Fourier converge uniformemente ad f in ogni intervallo in cui f è continua]

36. Introduzione agli spazi metrici

lunedì 27 dicembre 2021 10:59

Consideriamo un insieme $X \neq \emptyset$ e costruiamo una funzione, detta distanza,

$$d: X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$$

che gode delle seguenti proprietà:

1) $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
2) $d(x,y) = d(y,x) \qquad \forall x, y \in X$
3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \qquad \forall x, y, z \in X$

Dunque l'insieme munito della funzione distanza prende il nome di spazio metrico.
Cioè (X, d) è detto spazio metrico.

37.

lunedì 27 dicembre 2021 11:08

38.. Prime proprietà degli spazi metrici

lunedì 27 dicembre 2021 15:18

- Struttura topologica
- Spazi normati
- Disuguaglianza di Lipschitzianità della distanza

1) La <u>struttura topologica</u> è l'insieme delle palle aperte centrate nei vari punti avente raggio variabile.

2) Uno spazio vettoriale normato $(M, \|\cdot\|)$ è in modo naturale anche uno spazio metrico dotato della distanza

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

3) Negli spazi metrici vale la relazione:

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y) \qquad \forall x,y,z \in X$$

DIM (3)

- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \Rightarrow$

$$\Rightarrow d(x,z) - d(y,z) \leq d(x,y)$$

- $d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z) \Rightarrow$

$$\Rightarrow d(y,z) - d(x,z) \leq d(x,y)$$

39. Intorni circolari

lunedì 27 dicembre 2021 15:36

In uno spazio metrico è possibile definire un intorno circolare (o palla aperta o intorno sferico) centrato in x_0 e raggio r nel seguente modo:

$$B_r(x_0) \overset{def}{=} \{ x \in X \mid d(x_0, x) < r \}$$

$\blacksquare$

40. Cenni di topologia, definizione di topologia indotta da una metrica

lunedì 27 dicembre 2021 15:39

- Chiameremo <u>topologia</u> di X la famiglia di tutti gli aperti di X.

- Sia (X, d) uno spazio metrico. Definiamo <u>topologia indotta da d</u> di X la famiglia dei sottoinsiemi aperti di X rispetto alla metrica d.

Cioè

$$\tau_X \overset{def}{=} \{ A \subseteq X \mid A \text{ è aperto} \}$$

$\boxtimes$

41.. Insiemi aperti in uno spazio metrico

lunedì 27 dicembre 2021 15:56

Sia (X, d) uno spazio metrico. Diremo che $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, è aperto se $\forall x \in A \ \exists B_\varepsilon(x) \subset A$

42. Proprietà degli insiemi aperti (senza dimostrazione)

lunedì 27 dicembre 2021 16:00

In uno spazio metrico, ogni intorno circolare è un insieme aperto, ogni unione di aperti è aperta, l'intersezione di due aperti è aperta

$\square$

43. Insiemi chiusi in uno spazio metrico

lunedì 27 dicembre 2021 16:03

Sia (X,d) uno spazio metrico. Diremo che un sottoinsieme $C \subseteq X$ è chiuso se accade che $X \setminus C$ è aperto $\blacksquare$

44.. Proprietà degli insiemi chiusi

lunedì 27 dicembre 2021 16:05

In uno spazio metrico, ogni intersezione di chiusi è chiusa, l'unione di due chiusi è chiusa.

DIM

- Mostriamo che $\bigcap_{i \in I} C_i$, con C_i chiusi, è un chiuso:

passiamo al complementare e vediamo che è aperto, cioè

$X \setminus \bigcap_{i \in I} C_i \overset{\text{PER DE MORGAN}}{=} \bigcup_{i \in I} (X \setminus C_i)$ che è unione di aperti $\Rightarrow X \setminus \bigcap_{i \in I} C_i$ è aperto $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} C_i$ è chiuso

- Sia ora $X \setminus (C_1 \cup C_2) = (X \setminus C_1) \cap (X \setminus C_2)$ che è aperto dato che è intersezione di due aperti $\Rightarrow C_1 \cup C_2$ è chiuso

$\square$

45. Definizioni di intorno di un punto, punti interni, interno di un insieme, punti di accumulazione e chiusura di un insieme

lunedì 27 dicembre 2021 16:20

- Diremo che $I \subset X$ è un <u>intorno del punto</u> $x_0 \in X$ se accade che $\exists\ \varepsilon > 0$ e $\exists\ B_\varepsilon(x_0)$ t.c. $B_\varepsilon(x_0) \subset I$

- Diremo che un <u>punto</u> x_0 è <u>interno</u> ad un insieme $A \subset X$ se $\exists\ I$ intorno di x_0 t.c. $I \subseteq A$

- Sia $Y \subset X$ un insieme, si dice <u>interno di</u> Y (o <u>parte interna</u>) l'insieme dei punti interni $x_0 \in Y$; e si denota con $\mathring{Y}$.

[Diremo che x_0 è <u>esterno</u> ad $Y \subset X$ se $\exists\ B_\varepsilon(x_0)$ t.c. $B_\varepsilon(x_0) \subset X \setminus Y$]

- Diremo che $x_0 \in X$ è <u>punto di accumulazione</u> per $Y \subset X \iff$ Ogni intorno di x_0 contiene almeno un punto $x_1 \in Y$ con $x_1 \neq x_0$

[Diremo che x_0 è <u>punto isolato</u> per $Y \subset X$ se $x_0 \in Y$ e $\exists\ I$ intorno di x_0 t.c. $I \setminus \{x_0\} \notin Y$]

- Sia $A \subset X$, la <u>chiusura</u> di A è data dall'insieme $A \cup \{\text{punti di accumulazione}\}$, e si denota con $\bar{A}$; cioè

$$\bar{A} = A \cup \{\text{punti di accumulazione}\}$$

∎

46. Proprietà dell'interno e della chiusura di un insieme

martedì 28 dicembre 2021 15:54

A è chiuso $\iff \bar{A} = A$

Cioè, diremo che un insieme è chiuso $\iff$ contiene i suoi punti di accumulazione.

$\blacksquare$

47.. Definizioni di punto di frontiera, frontiera di un insieme, dominio

martedì 28 dicembre 2021 16:01

- Diremo che x_0 è punto di frontiera per $A \subset X$ se accade che ogni intorno di x_0 contiene almeno un punto di A ed un punto di $X \setminus A$

- La frontiera di $A \subset X$ è l'insieme dei punti di frontiera per A, si denota con ∂A

- Diremo che $A \subset X$ è un dominio se è la chiusura di un aperto

$\boxtimes$

48. Insiemi limitati

martedì 28 dicembre 2021 16:08

Sia (X, d) spazio metrico. Diremo che un insieme $A \subset X$ è <u>limitato</u> se $\exists x_0 \in X$ e $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $A \subset B_\varepsilon(x_0)$

$\blacksquare$

49. Diametro di un insieme limitato

martedì 28 dicembre 2021 16:11

Sia (X, d) spazio metrico. Diamo il nome di <u>diametro</u> dell'insieme $A \subset X$ alla quantità:

$$\delta(A) = \sup_{x,y \in A} [d(x,y)]$$

$\blacksquare$

50.. Limiti di successioni in uno spazio metrico

martedì 28 dicembre 2021 16:13

Sia (X, d) spazio metrico non vuoto. É possibile considerare una successione $\{x_n\}_{n \in N}$ di punti di X.

Diremo che la successione $\{x_n\}$ converge ad $x \in X$ se accade che $\lim_{n \to +\infty} d(x_n, x) = 0$

Cioè se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in N \text{ t.c. } d(x_n, x) < \varepsilon \qquad \forall n \geq \bar{n}$$

(Alternativamente scriveremo $x_n \xrightarrow{n \to +\infty} x$)

51. Unicità del limite di una successione

martedì 28 dicembre 2021 16:19

Negli spazi metrici vale l'unicità del limite

DIM

Supponiamo che $\exists\, x, y \in X$ t.c. $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} x$, $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} y$

Cioè

- $\forall \varepsilon>0\ \exists\, \bar{n}\in N$ t.c. $d(x_n,x)<\varepsilon \quad \forall n>\bar{n}$
- $\forall \varepsilon>0\ \exists\, \tilde{n}\in N$ t.c. $d(x_n,y)<\varepsilon \quad \forall n>\tilde{n}$

Prendiamo $\ddot{n} = \max\{\bar{n}, \tilde{n}\}$ in modo che valgano contemporaneamente le disuguaglianze.

Allora

$d(x,y) \le d(x_n,x) + d(x_n,y) < 2\varepsilon \quad \forall n>\ddot{n}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ si ha

$$0 \leq d(x,y) < 2\varepsilon$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$ $\blacksquare$

52.. Limiti di funzioni in spazi metrici

mercoledì 29 dicembre 2021 22:47

Sia $f: X \to Y$ con X e Y spazi metrici.

Sia $x_0 \in X$ e sia $y_0 \in Y$, y_0 è il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$ se:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), y_0) < \varepsilon \quad \forall x \in X$

Cioè

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$$

$\blacksquare$

53. Limiti in R^n e convergenza componente per componente

giovedì 30 dicembre 2021 10:05

Sia d_n la distanza euclidea in $\mathbb{R}^n$.
Sia $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di punti in $\mathbb{R}^n$, di coordinate

$$x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,n})$$

Sia $x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,n})$ un punto di $\mathbb{R}^n$.

Si ha che $d_n(x_k, x_0) \xrightarrow{k\to+\infty} 0 \iff \forall i \in \{1,\dots,n\}$ si ha $d_1(x_k, x_0) \xrightarrow{k\to+\infty} 0$ $\quad [d_1(x_k, x_0) = |x_{k,i} - x_{0,i}|]$

DIM

Consideriamo le componenti degli elementi della successione

$$x_1 = (x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,n})$$
$$x_2 = (x_{2,1}, x_{2,2}, \dots, x_{2,n})$$
$$\vdots$$
$$x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,n})$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$$
$$x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,n})$$

Devo mostrare che queste convergenze implicano la convergenza della successione, cioè:

$$d_n(x_n, x_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_{k,i} - x_{0,i})^2} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

Dati allora $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ si ha che vale questa catena di disuguaglianze:

$$0 \le \max_{i=1,\dots,n} a_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \le \sum_{i=1}^{n} a_i \le n \cdot \max_{i=1,\dots,n} a_i$$

Allora si ha che:

$$0 \le |x_{k,i} - x_{0,i}| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_{k,i} - x_{0,i}|^2\right)^{1/2} \le n \cdot \max_{i=1,\dots,n} |x_{k,i} - x_{0,i}|$$

Ora, se $|x_{k,i} - x_{0,i}| \to 0$ si ha che anche $n \cdot \max_{i=1,\dots,n} |x_{k,i} - x_{0,i}| \to 0$

Quindi anche $\left(\sum_{i=1}^{n} |x_{k,i} - x_{0,i}|^2\right)^{1/2} \longrightarrow 0$, ossia $|x_{k,i} - x_{0,i}| \longrightarrow 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

$(\Leftarrow)$: è triviale

54.. Definizione di funzione continua in spazi metrici

giovedì 30 dicembre 2021 10:39

Siano (X, d_X), (Y, d_Y) due spazi metrici.

Sia $f: X \longrightarrow Y$.

Diremo che f è <u>continua</u> in x_0 se:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ t.c. $d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \forall x \in X$

$\blacksquare$

55. Definizione di funzione sequenzialmente continua in spazi metrici

giovedì 30 dicembre 2021 14:31

Siano (X, d_X), (Y, d_Y) spazi metrici.

Diremo che $f: X \longrightarrow Y$ è una funzione <u>sequenzialmente continua</u> se accade che

$$x_n \longrightarrow x_0 \implies f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$$

ossia

$$d_X(x_n, x_0) \longrightarrow 0 \implies d_Y(f(x_n), f(x_0)) \longrightarrow 0$$

$\blacksquare$

56.. Teorema di equivalenza tra continuità e continuità sequenziale (senza dimostrazione)

giovedì 30 dicembre 2021 14:37

Negli spazi metrici:

[essere sequenzialmente continua in un punto x_0] $\overset{\text{è equivalente}}{\Longleftrightarrow}$ [essere continua in x_0]

$\boxed{}$

57. Continuità delle funzioni Lipschitziane

giovedì 30 dicembre 2021 14:41

Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana su un intervallo I. Allora essa è uniformemente continua su I.

DIM

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$

Consideriamo $x, y \in I$ t.c. $|x-y| < \delta$

Allora per la lipschitzianità della funzione si ha che:

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x-y| \qquad \forall x, y \in I$$

Però, poiché $|x-y| < \delta$, si ha:

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x-y| \leq L \cdot \delta = L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$$

Cioè

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \qquad \forall x, y \in I$$

$\blacksquare$

Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si dice che f è Lipschitziana se esiste una costante $L > 0$ t.c. $|f(x_1) - f(x_2)| < L \cdot |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in I$

Sia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f è uniformemente continua su D se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in D$

58. Definizione di funzione distanza di un punto da un insieme

giovedì 30 dicembre 2021 15:28

Sia (X, d) spazio metrico ed A un sottoinsieme di X.
Sia $x \in X$, la distanza di x da A è definita come:

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$$

$\blacksquare$

59.. Lipschitzianità e continuità della funzione distanza di un punto da un insieme

giovedì 30 dicembre 2021 15:30

Sia (X, d) spazio metrico ed A un sottoinsieme di X.
Per $x \in X$ la distanza di x da A è definita da:

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$$

Dunque vale la seguente disuguaglianza di Lipschitz:

$$|d(y, A) - d(x, A)| \leq d(y, x) \qquad \forall y, x \in X$$

In particolare, la funzione:

$$x \in X \longrightarrow d(x, A)$$

è continua in (X, d)

DIM

Osserviamo che per definizione di inf:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A \ \text{ t.c. } \ d(y, a) < d(y, A) + \varepsilon$$

Vogliamo mostrare che $d(x, A) \leq d(y, A) + d(x, y)$:

Fissiamo $\varepsilon > 0$, si ha:

$d(x, A) \leq d(x, a)$

Per la disuguaglianza triangolare risulta che $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y)$

Si ha dunque che $d(a, x) \leq d(x, y) + d(a, y)$

Ma $d(a, y) < d(y, A) + \varepsilon$

Ossia, riassumendo il tutto si ha:

$$d(x,A) \leq d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a) < d(x,y) + d(y,A) + \varepsilon$$

Per arbitrarietà di ε si ha:

$$d(x,A) \leq d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a) \leq d(x,y) + d(y,A)$$

Cioè

$$d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,A) \quad \Longrightarrow \quad d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y)$$

Procedendo in modo analogo si ha:

$$d(y,A) - d(x,A) \leq d(x,y)$$

e dunque

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$$

$\blacksquare$

60. Teorema di separazione di due insiemi chiusi e disgiunti mediante una funzione continua

giovedì 30 dicembre 2021 15:48

Siano A, B due insiemi chiusi e non vuoti in (X, d) spazio metrico.
Allora $\exists\, f : X \to [0,1]$ funzione continua t.c.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in A \\ 1 & \text{se } x \in B \end{cases}$$

DIM

Siano A, B in (X, d) spazio metrico due chiusi, disgiunti e non vuoti
Consideriamo dunque $d(x, A)$ e $d(x, B)$ e possiamo considerare f nel seguente modo:

$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}$$

Dunque f è continua perché rapporto di funzioni continue con valori in $[0,1]$.

Se $x \in A$ ho $d(x,A) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

Se $x \in B$ ho $d(x,B) = 0 \Rightarrow f(x) = 1$

$\blacksquare$

61. Definizione di spazio vettoriale

giovedì 30 dicembre 2021 15:58

Uno *spazio vettoriale* è un insieme V dove definiamo due operazioni:

- Somma di vettori
- Prodotto per uno scalare

Queste due operazioni soddisfano le seguenti proprietà:

1) $(x+y)+z = x+(y+z) \qquad \forall x, y, z \in V$

2) $x+y = y+x$

3) $\exists!\, 0 \in V$ t.c. $x+0 = 0+x = x \qquad \forall x \in V$

4) $\exists!\, (-x) \in V$ t.c. $x+(-x) = -x+x = 0 \qquad \forall x \in V$

5) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x \qquad \forall x \in V, \forall \lambda, \mu \in K$

6) $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x \qquad \forall x \in V, \forall \lambda, \mu \in K$

7) $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y \qquad \forall x, y \in V, \forall \lambda \in K$

8) $0 \cdot x = 0 \qquad \forall x \in V$

9) $1 \cdot x = x \qquad \forall x \in V$

$\blacksquare$

Sia $f \in C^0([a,b])$, cioè f appartiene all'insieme delle funzioni continue. Allora $C^0[a,b]$ è uno spazio vettoriale.

DIM

Per dimostrare che $C^0([a,b]) \overset{def}{=} \{f:[a,b] \to \mathbb{R} \,/\, f \text{ è continua}\}$ è uno spazio vettoriale, dobbiamo dimostrare che:

- la somma di due funzioni continue è ancora una funzione continua
- il prodotto di una funzione continua per uno scalare è ancora una funzione continua

Perciò, siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue su $[a,b]$

Ciò vuol dire che $\forall x_0 \in [a,b]$, f e g sono continue in x_0

Fissiamo allora $x_0 \in [a,b]$.

Dalla continuità di f in x_0 segue che:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0$ t.c. $|x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ con $x \in [a,b]$

Dalla continuità di g in x_0 segue che:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_2 > 0$ t.c. $|x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$ con $x \in [a,b]$

Sia ora $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, in questo modo si ha che se $|x - x_0| < \delta$, allora $|x - x_0| < \delta_1$ e $|x - x_0| < \delta_2$

Consideriamo ora la quantità:

$$|(f+g)(x) - (f+g)(x_0)|$$

Si ha che:

$$|(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| = |f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Perciò $(f+g)$ è continua in x_0

Consideriamo ora la quantità:

Consideriamo ora la quantità:

$$|\lambda f(x) - \lambda f(x_0)|$$

Si ha:

$$|\lambda f(x) - \lambda f(x_0)| = |\lambda \cdot (f(x) - f(x_0))| \leq |\lambda| \, |f(x) - f(x_0)| < |\lambda| \cdot \varepsilon$$

63. Definizione di norma e di spazio normato

giovedì 30 dicembre 2021 17:14

Sia V uno spazio vettoriale e supponiamo che $\exists$ una funzione, a cui daremo il nome di <u>norma</u>,

$$\|\cdot\| : V \longrightarrow [0, +\infty)$$

che soddisfa le seguenti proprietà:

1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \qquad \forall x \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \forall x, y \in V$

Diremo che $(V, \|\cdot\|)$ è uno <u>spazio normato</u>

$\blacksquare$

64. Esempi di spazi normati

venerdì 31 dicembre 2021 16:01

- $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ è uno spazio normato finito-dimensionale
- $\mathbb{R}^2$ con la norma euclidea è uno spazio normato

65.. Diseguaglianza di Young (dimostrazione facoltativa)

venerdì 31 dicembre 2021 16:04

Siano $x, y \in \mathbb{R}^+$. Sia $p > 1$ e p' il suo esponente coniugato, ossia quel numero t.c. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

Allora, vale la seguente disuguaglianza:

$$x \cdot y \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'}$$

(Con uguaglianza se e solo se $x^p = y^{p'}$)

$\boxtimes$

66. Diseguaglianza di Hölder (dimostrazione facoltativa)

venerdì 31 dicembre 2021 16:11

Siano $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Sia $p>1$ e sia p' il suo esponente coniugato, ossia quel numero t.c. $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$

Allora il prodotto scalare tra x e y

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

verifica la seguente disuguaglianza:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_{p'}$$

$\blacksquare$

67. Diseguaglianza di Minkowski (dimostrazione facoltativa)

venerdì 31 dicembre 2021 16:36

Si ha che $\forall p \in [1, +\infty)$ e $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ vale la seguente disuguaglianza:

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

$\blacksquare$

In $\mathbb{R}^n$ possiamo definire le p-norme:

Ricordiamo la norma euclidea:

$$|x| \overset{def}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Le p-norme si costruiscono in analogia a quella euclidea:

$$\|x\|_p \overset{def}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{con } p \in [1, +\infty) \text{ fissato}$$

Se $p = +\infty$, si pone

$$\|x\|_{\infty} \overset{def}{=} \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$$

Proprietà:

1) Vale la relazione:

$$\lim_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_{\infty} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

DIM

Sia $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Sappiamo che $\|x\|_{\infty} = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$

e sappiamo che $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$

Per cui risulta che:

$$\left(\|x\|_p\right)^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p$$

Ora, se x è fissato si ha che $\max_{i=1,\dots,n} |x_i| = |x_{i_0}|$ per un certo $i_0 \in \{1, \dots, n\}$.

Dunque si ha:

$$\|x\|_{\infty} = \max_{i=1,\dots,n} |x_i| = |x_{i_0}|$$

Vale dunque la seguente disuguaglianza:

$$\|x\|_p^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \leq n \cdot |x_{i_0}|^p$$

E quindi

$$\|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} |x_{i_0}|$$

Cioè

$$\|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \cdot \|x\|_{\infty}$$

E dunque:

$$\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \cdot \|x\|_{\infty}$$

E dunque:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \cdot \|x\|_\infty$$

Passando al limite per $p \to +\infty$ si ha:

$$\lim_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty \qquad \text{(Per il TEO dei Carabinieri)}$$

2) Per ogni $p \in [1, +\infty)$ la funzione $\|\cdot\|_p : R^n \to R$ è una norma

DIM

(1): $\|x\|_p = 0 \iff x = 0$

(2): $\|\lambda x\|_p = |\lambda| \cdot \|x\|_p$

Sono verificate poiché seguono dalla definizione; va verificato (3)

(3): $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$

- Se $p = +\infty$: Dati $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in R^n$ si ha:

$$\|x+y\|_\infty = \sup_{i=1,\dots,n} |x_i + y_i|$$

Ora

$$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty \implies$$

$$\implies \|x+y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

- Se $p = 1$:

Si ha che

$$\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + |y_i| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

Dunque

$$\|x+y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$$

- Se $1 < p < +\infty$:

Dobbiamo usare le seguenti disuguaglianze:

– Disuguaglianza di Young

- Disuguaglianza di Young
- Disuguaglianza di Hölder
- Disuguaglianza di Minkowski

$\blacksquare$

69. Alcune norme sullo spazio delle funzioni continue

venerdì 31 dicembre 2021 17:13

Nello spazio $C^0([a,b])$ possiamo considerare alcune norme:

- La norma del sup:

$$\|f\|_\infty \stackrel{def}{=} \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

- La norma integrale:

$$\|f\|_p \stackrel{def}{=} \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

70. Metrica indotta da una norma

sabato 1 gennaio 2022 15:11

Sia $(V, \|\ \|_V)$ uno spazio normato. É possibile costruire uno spazio metrico (V, d_V) dove d_V è la <u>metrica indotta dalla norma</u>:

$$d_V(x, y) \stackrel{def}{=} \|x - y\|_V$$

$\blacksquare$

71.. Invarianza per traslazione e omogeneità della metrica indotta da una norma

sabato 1 gennaio 2022 15:14

Sia $(V, \|\ \|_V)$ spazio normato.

Sia (V, d_V) spazio metrico con d_V metrica indotta dalla norma

Allora d_V ha due proprietà importanti:

1) <u>É invariante per traslazione</u>:

Infatti

$$d_V(x+z, y+z) = \|x+z-y-z\|_V = \|x-y\|_V = d_V(x,y)$$

2) <u>É invariante per omogeneità</u>:

Infatti

$$d_V(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\|_V = \|\lambda(x-y)\|_V = |\lambda| \cdot \|x-y\|_V = |\lambda| \cdot d_V(x,y)$$

∎

72. Successioni di Cauchy in spazi metrici

sabato 1 gennaio 2022 15:21

Diremo che una successione $\{x_n\}$ <u>è di Cauchy</u> in (X, d) spazio metrico se accade che:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \ \text{t.c.} \ d(x_h, x_k) < \varepsilon \quad \forall h, k > \bar{n}$$

$\blacksquare$

73. Spazi metrici completi e spazi di Banach

sabato 1 gennaio 2022 15:26

- Spazio metrico completo:

Diremo che (X, d) spazio metrico è uno spazio metrico completo se e solo se ogni successione di Cauchy converge ad un elemento di X

- Spazio di Banach (o spazio normato completo):

Diremo che $(X, \| \|_X)$ è uno spazio di Banach (o analogamente uno spazio normato completo) se e solo se X è uno spazio metrico completo con la metrica indotta dalla norma

$\blacksquare$

- $(C^0([a,b]), \| \|_\infty)$ è uno spazio normato completo, infatti in $C^0([a,b])$ possiamo considerare la norma del sup:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

Esso è uno spazio normato completo dato che vale il teorema di continuità del limite

- $(C^1([a,b]), \| \|_{C^1})$ è uno spazio normato completo, infatti

Consideriamo $C^1([a,b])$ e poniamo

$$\|f\|_{C^1} \stackrel{def}{=} \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$$

Dunque $(C^1([a,b]), \| \|_{C^1})$ è uno spazio normato completo dato che vale il teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata

- $(C^K([a,b]), \| \|_{C^K})$ è uno spazio normato completo, infatti

Consideriamo $C^K([a,b])$ e prendiamo la norma:

$$\|f\|_{C^K} \stackrel{def}{=} \sum_{i=0}^{K} \sup_{x\in[a,b]} |f^{(i)}(x)| = \sum_{i=0}^{+\infty} \|f^{(i)}(x)\|_\infty$$

75. Esempi di spazi non completi

sabato 1 gennaio 2022 15:47

- $C^1([a,b])$ non è necessariamente completo. Infatti possiamo considerare la norma del sup:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

e consideriamo la successione $\{f_K\}$ definita nel seguente modo:

$$f_K(x) \overset{def}{=} \sqrt{x^2+\frac{1}{K}}$$

Si ha che la funzione $f(x)=\sqrt{x^2}=|x| \notin C^1([a,b])$ ma $f_K \xrightarrow{U} f$ in $[a,b]$

Quindi si ha che

$$\left(C^1([a,b]), \|\ \|_\infty\right) \text{ è uno spazio normato non completo.}$$

- Consideriamo $f\in C^0([a,b])$ e definiamo

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

Allora $\left(C^0([a,b]), \|\ \|_p\right)$ è uno spazio normato non completo; infatti ci basta considerare la successione:

$$f_K(x) \overset{def}{=} \begin{cases} -1 & \text{se } -1\le x\le -\frac{1}{K} \\ Kx & \text{se } -\frac{1}{K}< x < \frac{1}{K} \\ 1 & \text{se } x\ge \frac{1}{K}\end{cases} \qquad \text{con } [a,b]=[-1,1]$$

Si ha che:

$$f_k \xrightarrow{p} f \text{ in } [-1,1], \text{ dove } f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x<0 \\ 0 & \text{se } x=0 \\ 1 & \text{se } x>0 \end{cases}$$

e dato che f non è continua $\Rightarrow f_k \not\rightarrow f$ in $[-1,1]$

$\blacksquare$

Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $f: X \to X$ una contrazione.
Allora $\exists!\, x \in X$ t.c. $f(x) = x$ [esiste un'unico punto fisso]

DIM

Fissiamo $x_0 \in X$ e costruiamo una successione di punti in X fatta nel seguente modo:

$x_1 \overset{def}{=} f(x_0)$
$x_2 \overset{def}{=} f(x_1)$
$\vdots$
$x_{n+1} \overset{def}{=} f(x_n)$

Ora valutiamo le distanze tra i vari punti:

$$d(x_1, x_2) \overset{def}{=} d(f(x_0), f(x_1)) \leq L \cdot d(x_1, x_0) \overset{def}{=} L \cdot d(x_0, f(x_0))$$

$$d(x_2, x_3) \overset{def}{=} d(f(x_1), f(x_2)) = d\big(f(f(x_0)), f(f(x_1))\big) = d\big(f(f(x_0)), f(f(f(x_0)))\big) \leq L \cdot d\big(f(x_0), f(f(x_0))\big) \leq L^2 \cdot d(x_0, f(x_0))$$

$\vdots$

$$d(x_n, x_{n+1}) \overset{def}{=} d(f(x_{n-1}), f(x_n)) = \ldots \leq L^n \cdot d(x_0, f(x_0))$$

Valutiamo a questo punto:

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \ldots + d(x_{n+1}, x_n) \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} L^i \cdot d(x_0, f(x_0)) = L^n \cdot \sum_{i=0}^{p-1} L^i \cdot d(x_0, f(x_0)) = L^n \cdot d(x_0, f(x_0)) \sum_{i=0}^{p-1} L^i \leq L^n \cdot d(x_0, f(x_0)) \cdot \sum_{i=0}^{+\infty} L^i \leq L^n \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{1-L}\right)} \cdot d(x_0, f(x_0)) \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

dato che $L < 1$

Calcolo della serie geometrica $\sum_{i=0}^{+\infty} L^i$

Per cui $\{x_n\}$ è di Cauchy.

Inoltre X è completo $\Rightarrow \exists\, x \in X$ t.c. $x_n \to x$; dunque risulta che passando al limite per $n \to +\infty$ in $x_{n+1} = f(x_n)$ si ha:

$$x = f(x)$$

Dunque x è un punto fisso.

Supponiamo ora, per assurdo, che $\exists\, x, y \in X$ t.c. $f(x) = x$ e $f(y) = y$

Ora

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y)$$

che è assurdo se $d(x, y) \neq 0$
Però se fosse $d(x, y) = 0$ si ha che $x = y$, ancora assurdo

$\Rightarrow x$ è unico

$\blacksquare$

77.. Lemma di Mc Shane (dimostrazione facoltativa)

domenica 2 gennaio 2022 16:05

Sia (X, d) spazio metrico e sia $A \subset X$.
Allora ogni funzione $f: A \to R$ lipschitziana con costante L
può essere prolungata su X in una funzione $g: X \to R$ lipschitziana con la stessa costante L

$\blacksquare$

78. Insiemi compatti in uno spazio metrico

domenica 2 gennaio 2022 16:10

Sia (X, d) spazio metrico, diremo che $K \subset X$ è un sottoinsieme <u>compatto</u> se accade che da ogni successione di punti in K è possibile estrarre una sottosuccessione convergente in K

$\blacksquare$

Un sottoinsieme $K \subset \mathbb{R}^n$ è compatto $\iff$ è chiuso e limitato [Anche detto teorema di Heine-Borel]

DIM

$\Rightarrow$): Dobbiamo vedere che:

1) Compatto $\Rightarrow$ chiuso
2) Compatto $\Rightarrow$ limitato

- Sappiamo che la relazione "compatto $\Rightarrow$ chiuso" è vera dato che ci troviamo in uno spazio metrico. [Infatti, vale la seguente proposizione: • Sia (X, d) spazio metrico e $K \subset X$ compatto. Allora K è chiuso]

- Supponiamo, per assurdo, che $\exists \{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ t.c. $\|x_k\| \to +\infty$ da essa non è possibile estrarre una successione convergente $\Rightarrow K$ non è compatto, ASSURDO perché abbiamo per ipotesi K compatto $\Rightarrow K$ è limitato

$\Leftarrow$): Mostriamo ora che vale la relazione "chiuso e limitato $\Rightarrow$ compatto":
Sia K chiuso e limitato con $\{x_k\} \subset K$ e mostriamo che $\exists \{x_{k_h}\} \subset \{x_k\}$ t.c. $x_{k_h} \to x_0 \in K$
Scriviamo

$$x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,n})$$
e
$$x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,n})$$

Ora
$$x_1 = (x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,n})$$
$$x_2 = (x_{2,1}, x_{2,2}, \dots, x_{2,n})$$
$$\vdots$$
$$x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,n})$$
$$\vdots$$

Per il teorema di Bolzano-Weierstrass è possibile estrarre da $\{x_k\}$ una sottosuccessione $\{x_{k_h}\}$ t.c.
- la 1° componente converge a $x_{0,1}$
- la 2° componente converge a $x_{0,2}$ [Con un'altra sottosuccessione di $\{x_k\}$; possiamo chiamarla $\{x_{k_{h_\ell}}\}$]
- la 3° componente converge a $x_{0,3}$ [Con un'altra sottosuccessione di $\{x_k\}$; possiamo chiamarla $\{x_{k_{h_{\ell_m}}}\}$]

E così via.

Con un procedimento di tipo diagonale otteniamo una sottosuccessione di $\{x_k\}$ che converge a $x_0 \in K$

$\Rightarrow K$ è compatto

Sia $K \subseteq X$ compatto, sia (X,d) spazio metrico e sia $f: K \to R$ continua.
Allora f possiede massimo e minimo su K

DIM

Dato che $f(K) \subseteq R$, possiamo considerare

$$M \overset{def}{=} \sup_{x \in K} \{f(x)\}$$

e

$$m = \inf_{x \in K} \{f(x)\}$$

Mostriamo che $\exists$ una successione di punti $\{x_K\} \subset K$ t.c. $f(x_K) \xrightarrow{K \to +\infty} M$ (il caso per m è analogo)

Ora con $f(K) \subseteq R$ si possono verificare 2 casi:

1) $M = +\infty$

2) $M < +\infty$

• Se $M = +\infty$ è possibile costruire una successione $\{x_K\} \subset K$ t.c. $f(x_K) > K \quad \forall K \in N \Rightarrow f(x_K) \xrightarrow{K \to +\infty} M = +\infty$

• Se $M < +\infty$, per definizione di sup è possibile avere una successione $\{x_K\}$ t.c.

$$M - \varepsilon \leq f(x_K) \leq M \qquad \forall \varepsilon > 0$$

Sia dunque $\varepsilon = \frac{1}{K} > 0$, si ha:

$$M - \frac{1}{K} \leq f(x_K) \leq M$$

Anche in questo caso $f(x_K) \xrightarrow{K \to +\infty} M$

Ora $\{x_K\} \subset K$ che è compatto $\Rightarrow \exists \{x_{K_h}\} \subset \{x_K\}$ ed $\exists x_0 \in K$ t.c. $x_{K_h} \to x_0$

Per cui

$$f(x_{K_h}) \longrightarrow f(x_0)$$ [Perché f è continua]

E dunque, per l'unicità del limite in R ho che:

$$f(x_{K_h}) \longrightarrow f(x_0)$$

e

$$f(x_{K_h}) \longrightarrow M$$

$$\Rightarrow f(x_0) = M \qquad \text{con } M < +\infty$$

Cioè $f(x_0) = M = \max_{x \in K} \{f(x)\}$ $\blacksquare$

81.. Norme equivalenti

domenica 2 gennaio 2022 17:04

Diremo che in uno spazio vettoriale V le <u>norme</u> $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ <u>sono equivalenti</u> se e solo se $\exists\, m, M \in (0,+\infty)$ t.c.

$$m \cdot \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M \cdot \|x\|_1 \qquad \forall x \in V$$

<u>OSS</u>:

Due norme equivalenti generano la stessa topolgia

$\blacksquare$

Tutte le norme sono equivalenti in $\mathbb{R}^n$.

DIM

Mostriamo che tutte le norme sono equivalenti alla norma euclidea, e dunque equivalenti tra loro.

Data una norma $\| \ \|$, vogliamo mostrare che $\exists\, m, M \in (0, +\infty)$ t.c.

$$m \cdot |x| \leq \|x\| \leq M \cdot |x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ e } | \ | \text{ metrica euclidea.}$$

Sia $x \in \mathbb{R}^n$ e sia $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ la base canonica.
Allora posso scrivere x nella forma seguente:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Valutiamo ora $\|x\|$, si ha:

valore assoluto, non norma euclidea

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i e_i\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot \|e_i\|$$

Dunque

norma euclidea

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot \|e_i\| \leq \max_{i=1,\dots,n} \|e_i\| \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq n \cdot \max_{i=1,\dots,n} \|e_i\| \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2} = n \cdot \max_{i=1,\dots,n} \|e_i\| \cdot |x|$$

Poniamo

$$M \stackrel{def}{=} n \cdot \max_{i=1,\dots,n} \|e_i\|$$

Per cui

$$\|x\| \leq M \cdot |x|$$

Costruiamo ora un compatto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ sul quale applicare il Teorema di Weierstrass.
Sia, pertanto

$$K \stackrel{def}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$$

[È compatto perché è chiuso e limitato]

Dato che $0 \notin K$, possiamo scrivere $\|x\|$ nel seguente modo:

$$\|x\| = \left\| x \cdot \frac{|x|}{|x|} \right\| = |x| \cdot \left\| \frac{x}{|x|} \right\|$$

$$\|x\| = \left\|x \cdot \frac{|x|}{|x|}\right\| = |x| \cdot \left\|\frac{x}{|x|}\right\|$$

Ora, K ammette massimo e minimo, e dunque:

$$\|x\| = |x| \cdot \left\|\frac{x}{|x|}\right\| \geq m \cdot |x|$$

dove $m = \min_{x \in K} \|x\|$

e $m > 0$

Dunque risulta

$$m \cdot |x| \leq \|x\| \leq M \cdot |x| \qquad \forall x \in R^n$$

∎

83.. Funzioni uniformemente continue

lunedì 3 gennaio 2022 16:35

Sia $f : X \to Y$ con (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici.

Diremo che f è <u>uniformemente continua</u> se accade che:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ t.c. $\forall x, y \in X$ con $d_X(x,y) < \delta$ si ha $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$

Sia K compatto in (X, d_X) spazio metrico; sia (Y, d_Y) spazio metrico.
Sia, inoltre, $f : K \longrightarrow Y$ una funzione continua.
Allora f è uniformemente continua.

<u>DIM</u>

Supponiamo, per assurdo, che $\exists\, \varepsilon_0 > 0,\ \{x_K\}, \{x'_K\} \subset K$ t.c.
$d_X(x_K, x'_K) < \frac{1}{K}$ e $d_Y(f(x_K), f(x'_K)) \geq \varepsilon_0 \qquad \forall K \in \mathbb{N}$

Ora $\{x_K\} \subset K$, con K compatto, si ha che:
$\exists \{x_{K_h}\} \subset \{x_K\}$ t.c. $x_{K_h} \longrightarrow x_0 \in K$

è lo stesso dato che negli spazi metrici vale l'unicità del limite

Risulta anche che:
$\exists \{x'_{K_h}\} \subset \{x'_K\}$ t.c. $x'_{K_h} \longrightarrow x_0 \in K$ [Perché anche $x'_{K_h} \longrightarrow x_0$? Consideriamo la quantità $|x'_{K_h} - x_0| \Rightarrow |x'_{K_h} - x_0| = |x'_{K_h} - x_{K_h} + x_{K_h} - x_0| \leq |x'_{K_h} - x_{K_h}| + |x_{K_h} - x_0| \leq \frac{1}{K_h} + |x_{K_h} - x_0| \xrightarrow{K_h \to +\infty} 0$]

Ora se $x_{K_h}, x'_{K_h} \longrightarrow x_0$ si ha che:

$$f(x_{K_h}), f(x'_{K_h}) \longrightarrow f(x_0) \quad \text{dato che } f \text{ è continua}$$

$\Rightarrow d_Y(f(x_{K_h}), f(x'_{K_h})) \xrightarrow{h \to +\infty} 0$ ma questo accade se e solo se $d_Y(f(x_{K_h}), f(x'_{K_h})) < \varepsilon$ definitivamente,

contro la supposizione che $d_Y(f(x_K), f(x'_K)) \geq \varepsilon_0$; quindi è ASSURDO

$\blacksquare$

85. Insiemi connessi, connessi per poligonali

lunedì 3 gennaio 2022 20:29

- Diremo che $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A aperto, è un <u>aperto connesso</u> se la relazione:

$A = A_1 \cup A_2$, con A_1 e A_2 aperti e $A_1 \cap A_2 = \emptyset \implies A_1 = \emptyset$ oppure $A_2 = \emptyset$

- Diremo che $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è <u>connesso per poligonali</u> se e solo se

$\forall x, y \in A$ $\exists$ una poligonale P che unisce x e y e a sua volta contenuta in A

$\blacksquare$

Dati h punti distinti $x_1, \dots, x_h$, chiameremo <u>poligonale</u> di vertici $x_1, \dots, x_h$ l'unione dei segmenti $[x_i, x_{i+1}]$ con $i = 1, \dots, h-1$

Cioè

$$\underset{\text{poligonale}}{P} = \bigcup_{i=1}^{h-1} [x_i, x_{i+1}]$$

86.. Teorema di equivalenza tra aperti connessi e aperti connessi per poligonali in R^n (senza dimostrazione)

lunedì 3 gennaio 2022 20:43

Sia A aperto.

Allora

A è connesso $\Longleftrightarrow$ A è connesso per poligonali $\blacksquare$

Sia A un aperto (o un dominio) connesso di R^n e sia
$f : A \to R$ continua su A.
Allora f assume tutti i valori compresi fra l'inf ed il sup su A.

DIM
Sia $c \in R$ t.c. $\inf_{x \in A} f(x) < c < \sup_{x \in A} f(x)$.
Dobbiamo mostrare che $\exists \bar{x} \in A$ t.c. $c = f(\bar{x})$.
Mostriamo questa cosa nel caso degli aperti connessi:
Per definizione di inf e sup, $\exists x_1, x_2 \in A$ t.c. $l \overset{def}{=} f(x_1)$ e $m \overset{def}{=} f(x_2)$ con $\inf_{x \in A} f(x) \leq l < c < m \leq \sup_{x \in A} f(x)$
Costruiamo una poligonale P che unisce x_1 e x_2, con $P \subset A$ [Possiamo costruire P dato che A è connesso]
Risulta che l'immagine (cioè $f(P)$) di P è un intervallo (poiché f è continua) e i segmenti di P sono consecutivi ("con vertice in comune").
Allora dato che $l < c < m$, $\exists \bar{x} \in P$ t.c. $c = f(\bar{x})$ [Per il teorema dei valori intermedi di Analisi 1]

$\blacksquare$

La definizione di limite per funzioni di una variabile reale si estende facilmente alle funzioni di più variabili:
Consideriamo un sottoinsieme $A \subset R^n$ e $f: A \to R$ e sia x_0 un punto di accumulazione per A.
Diremo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \overset{def}{\iff} \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A - \{x_0\} \text{ con } \underbrace{|x - x_0|}_{\text{norma}} < \delta \Rightarrow \underbrace{|f(x) - l|}_{\text{modulo}} < \varepsilon$$

Esempi:

- $f(x,y) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$; si ha che:

$$0 \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

Per cui il limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

- $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; dobbiamo distinguere due casi:

1) $f(0,y)$
2) $f(x,0)$

Si ha che:

- $f(0,y) = \dfrac{0}{\sqrt{0+y^2}} = 0$ con $y \neq 0$
- $f(x,0) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2}} = \dfrac{x}{|x|}$ con $x \neq 0$ $\Rightarrow \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Per cui

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \nexists$$

In generale per i limiti possiamo ragionare in 3 modi diversi:
1) Maggiorazione e minorazione
2) Trovare due limiti diversi $\Rightarrow \nexists$ limite (dato che negli spazi metrici vale l'unicità del limite)
3) Trasformazione in coordinate polari

89.. Definizione di derivata parziale, derivata direzionale e differenziale

martedì 4 gennaio 2022 15:46

- Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, sia $f: A \to \mathbb{R}$ e sia $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$.

Chiameremo <u>derivata parziale</u> di f in x_i nel punto x il limite del seguente rapporto incrementale:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h}$$

- Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ con A aperto, sia $x \in A$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}^n$ t.c. $|\lambda| = 1$.

Per $t \in \mathbb{R}$ sufficientemente piccolo si ha che $x + t\lambda \in A$.

Diremo che f è <u>derivabile nella direzione di λ</u> se esiste finito il seguente limite:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\lambda) - f(x)}{t}$$

- Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $x \in A$, con A aperto.

Diremo che f è differenziabile in $x \in A$ se e solo se accade che:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x) - \langle Df(x), h \rangle}{|h|} = 0 \qquad \text{con } h \in \mathbb{R}^n$$

Se f è differenziabile in $x \in A$, possiamo definire la funzione:

$$\begin{aligned} df(x) : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longrightarrow \langle Df(x), h \rangle \end{aligned}$$

All' applicazione lineare $f(x)$ diamo il nome di <u>differenziale</u>

90. Derivate successive

martedì 4 gennaio 2022 16:06

Sia $A \subseteq R^n$, con A aperto. Sia $f: A \to R$.
Se f è derivabile in $x \in A$ (ovvero se esistono tutte le derivate parziali $f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \dots, f_{x_n}(x)$)
possiamo vedere se per qualche $i \in \{1, \dots, n\}$ risulta che f_{x_i} è a sua volta derivabile rispetto alla variabile x_j nel punto x_i
A tale derivata diamo il nome di derivata parziale seconda.

É possibile scrivere tutte le derivate parziali in modo più compatto (sotto forma di matrice):

$$D^2 f = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} & \cdots & f_{x_1 x_n} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} & \cdots & f_{x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1} & f_{x_n x_2} & \cdots & f_{x_n x_n} \end{pmatrix}$$

É detta matrice Hessiana

Gli elementi della diagonale principale sono detti derivate seconde pure, gli altri elementi sono detti derivate seconde miste

91. Teorema di Schwarz

martedì 4 gennaio 2022 16:23

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, sia $x_0 \in A$ e f una funzione derivabile 2 volte in A.
Se $f_{x_i x_j}$ e $f_{x_j x_i}$ con $i \neq j$ sono continue in x_0, allora $f_{x_i x_j}(x_0) = f_{x_j x_i}(x_0)$

DIM

Sia $n = 2$.
Sia quindi $(x_0, y_0) \in A$ e (x, y) un punto generico di A.
Costruiamo due funzioni:

- $F(x) \overset{def}{=} f(x,y) - f(x,y_0)$ con y e y_0 fissati
- $G(y) \overset{def}{=} f(x,y) - f(x_0,y)$ con x e x_0 fissati

Applichiamo il teorema di Lagrange a $F(x)$ nell'intervallo $[x_0, x]$, si ha:
$\exists\, x_1 \in [x_0, x]$ t.c. $F'(x_1) = \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$

Da cui si ha:
$F(x) - F(x_0) = F'(x_1)(x - x_0) = [f_x(x_1, y) - f_x(x_1, y_0)](x - x_0)$

Applichiamo nuovamente il teorema di Lagrange in $f_x(x_1, y)$ rispetto ad y, si ha che:
$\exists\, y_1 \in [y_0, y]$ t.c. $f_{xy}(x_1, y_1) = \dfrac{f_x(x_1,y) - f_x(x_1,y_0)}{y - y_0} \Rightarrow f_x(x_1,y) - f_x(x_1,y_0) = f_{xy}(x_1,y_1)(y - y_0)$

Da cui si ha:
$F(x) - F(x_0) = f_{xy}(x_1, y_1)(y - y_0)(x - x_0)$

Procediamo in modo analogo per la funzione $G(y)$, si ha che:
$\exists\, y_2 \in [y_0, y]$ t.c. $G'(y_2) = \dfrac{G(y) - G(y_0)}{y - y_0}$

Da cui si ha:
$G(y) - G(y_0) = G'(y_2)(y - y_0) = [f_y(x, y_2) - f_y(x_0, y_2)](y - y_0)$

Riapplicando Lagrange in $f_y(x, y_2)$ e derivando rispetto ad x, si ha:
$\exists\, x_2 \in [x_0, x]$ t.c. $f_{yx}(x_2, y_2) = \dfrac{f_y(x, y_2) - f_y(x_0, y_2)}{x - x_0}$

Da cui si ha:
$G(y) - G(y_0) = G'(y_2)(y - y_0) = f_{yx}(x_2, y_2)(x - x_0)(y - y_0)$

Risulta infine che:

$$F(x) - F(x_0) = G(y) - G(y_0)$$

E dunque

$$f_{xy}(x_1, y_1)(x - x_0)(y - y_0) = f_{yx}(x_2, y_2)(x - x_0)(y - y_0)$$

$$\Rightarrow f_{xy}(x_1, y_1) = f_{yx}(x_2, y_2)$$

Dove risulta che:

- $x_0 < x_1, x_2 < x$
- $y_0 < y_1, y_2 < y$

Passando al limite per $(x,y) \to (x_0,y_0)$ si ha che anche $(x_1,y_1) \to (x_0,y_0)$ e anche $(x_2,y_2) \to (x_0,y_0)$

Per cui:

$$\begin{array}{ccc} f_{xy}(x_1,y_1) & = & f_{yx}(x_2,y_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ f_{xy}(x_0,y_0) & & f_{yx}(x_0,y_0) \end{array}$$

Dunque nel punto (x_0,y_0) si ha:

$$f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$$

$\Rightarrow$ TESI

$\blacksquare$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto ed $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile in A.
Se le derivate parziali $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$ sono continue in $x \in A$.
Allora f è differenziabile in $x \in A$.

DIM

Sia $n = 2$.
Dobbiamo mostrare che $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x+h, y+k) - f(x,y) - (f_x(x,y)\cdot h + f_y(x,y)\cdot k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$

Consideriamo la quantità
$$f(x+h, y+k) - f(x,y)$$

Si ha:
$$f(x+h, y+k) - f(x,y) = f(x+h, y+k) + f(x, y+k) - f(x, y+k) - f(x,y) \overset{\text{TEO DI LAGRANGE}}{=} f_x(x_1, y+k)\cdot h + f_y(x, y_1)\cdot k$$
dove $x_1 \in [x, x+h]$
dove $y_1 \in [y, y+k]$

Ora
$$0 \le \left| \frac{f(x+h,y+k) - f(x,y) - (f_x(x,y)\cdot h + f_y(x,y)\cdot k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| = \left| \frac{f_x(x_1,y+k)\cdot h + f_y(x,y_1)\cdot k - f_x(x,y)\cdot h - f_y(x,y)\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| \le \left| \frac{f_x(x_1,y+k)\cdot h - f_x(x,y)\cdot h}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| + \left| \frac{f_y(x,y_1)\cdot k - f_y(x,y)\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| \le |f_x(x_1, y+k) - f_x(x,y)| \cdot \frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} + |f_y(x,y_1) - f_y(x,y)| \cdot \frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \le |f$$

Ora passando al limite per $(h,k) \longrightarrow (0,0)$ si ha che:
- dato che $x_1 \in [x, x+h] \Rightarrow x \le x_1 \le x+h$ e per $h \to 0$ si ha $x_1 \to x$
- dato che $y_1 \in [y, y+k] \Rightarrow y \le y_1 \le y+k$ e per $k \to 0$ si ha $y_1 \to y$

Dunque
- $f_x(x_1, y+k) \xrightarrow{(h,k)\to(0,0)} f_x(x,y)$
- $f_y(x, y_1) \xrightarrow{(h,k)\to(0,0)} f_y(x,y)$

E quindi $f(x,y)$ è differenziabile in (x,y) in A ▨

$$_x(x, y+k) - f_x(x,y)| + |f_y(x,y) - f_y(x,y)|$$

93.

martedì 4 gennaio 2022 21:55

- Sia x_0 punto di accumulazione per $A \subset \mathbb{R}^n$ e sia $f: A \to \mathbb{R}$.

Diremo che:

f è continua in $x_0 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ t.c. $\forall x \in A$ si ha che $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

- Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $x \in A$, con A aperto.

Diremo che:

f è differenziabile in $x \in A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \langle Df(x), h \rangle}{|h|} = 0$ NORMA

Proposizione: Differenziabilità $\Rightarrow$ Continuità

Se f è differenziabile in A, allora f è continua in A.

DIM

f è continua in $x_0 \in A$, con A aperto, $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0) \Longleftrightarrow \lim_{h \to 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = 0$

Consideriamo dunque la quantità:

$$\lim_{h \to 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)]$$

Si ha:

$$\lim_{h \to 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = \lim_{h \to 0} \left(\langle Df(x_0), h \rangle + o\|h\| \right)$$

Ora

DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY-SCHWARZ

$$0 \le |\langle Df(x_0), h \rangle| \le |Df(x_0)| \cdot |h|$$

e passando al limite per $h \to 0$, si ha:

$$\langle Df(x_0), h \rangle \longrightarrow 0$$

Dunque

$$\lim_{h \to 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = 0$$

$\blacksquare$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e sia $x \in A$.
Se f è differenziabile in x, allora f ammette derivata direzionale in ogni direzione $\lambda \in \mathbb{R}^n$ ed ogni derivata vale:

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x) = \langle Df(x), \lambda \rangle = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x) \cdot \lambda_i$$

DIM

La derivata direzionale nella direzione λ in $x \in A$ è data da:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+t\lambda) - f(x)}{t}$$

Consideriamo la curva $x(t) = x + t\lambda$.
Ora $x(t) \in A$ per t sufficientemente piccolo.
La derivata di f nella direzione λ è uguale alla derivata in $t=0$, per cui:

TEO DI DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI COMPOSTE

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x) = \left[\frac{d}{dt} f(x(t))\right]_{t=0} = \langle Df(x), \lambda \rangle = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x) \cdot \lambda_i$$

$\blacksquare$

96. Definizione di curva in R^n

mercoledì 5 gennaio 2022 15:51

Sia I un intervallo di R e consideriamo n funzioni $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ a valori reali.
Consideriamo l'applicazione $X: I \to R^n$ definita da:

$$X(t) \stackrel{def}{=} (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \qquad \forall t \in I$$

Questa applicazione prende il nome di <u>curva</u> in R^n

$\blacksquare$

Se $x(t)$ è derivabile in I (cioè se le n funzioni $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ sono derivabili in $t \in I$) e se la funzione f è differenziabile in $x(t) \in A \subset \mathbb{R}^n$;
Allora $F \overset{def}{=} f \circ x(t)$ è derivabile in $t \in I$ e la derivata vale:

$$F'(t) = \langle Df(x(t)), x'(t) \rangle = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x(t)) \cdot x_i'(t)$$

DIM

Ci interessa il limite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h}$$

Ossia

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x(t+h)) - f(x(t))}{h}$$

Dato che f è differenziabile $\Rightarrow f(x(t+h)) = f(x(t)) + \langle Df(x(t)), (x(t+h) - x(t)) \rangle + o(|x(t+h) - x(t)|)$

Dunque ci interessa il limite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\langle Df(x(t)), x(t+h) - x(t)\rangle + o(|x(t+h) - x(t)|)\right]$$

Consideriamo il termine $o(|x(t+h) - x(t)|)$ e valutiamo il limite $\lim_{h\to 0} \frac{o(|x(t+h) - x(t)|)}{h}$, si ha:

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{o(|x(t+h)-x(t)|)}{h}\right| = \lim_{h\to 0}\left|\frac{o(|x(t+h)-x(t)|)}{h}\cdot\frac{|x(t+h)-x(t)|}{|x(t+h)-x(t)|}\right| = \lim_{h\to 0}\left|\underbrace{\boxed{\frac{o(|x(t+h)-x(t)|)}{|x(t+h)-x(t)|}}}_{\to 0}\cdot\frac{|x(t+h)-x(t)|}{h}\right| = \lim_{h\to 0}\left|\frac{o(|x(t+h)-x(t)|)}{|x(t+h)-x(t)|}\right|\cdot\left|\frac{|x(t+h)-x(t)|}{h}\right| = \lim_{h\to 0}\left|\frac{o(|x(t+h)-x(t)|)}{|x(t+h)-x(t)|}\right|\cdot\left|\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\right|$$

Ora

$$\left|\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\right| = \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i(t+h)-x_i(t)}{h}\right)^2\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\left|\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\right| = \lim_{h\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i(t+h)-x_i(t)}{h}\right)^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i'(t))^2\right)^{1/2} = |x_i'(t)|$$

Alla fine della fiera risulta che:

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{o(|x(t+h)-x(t)|)}{|x(t+h)-x(t)|}\right|\cdot\left|\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\right| = \lim_{h\to 0} 0\cdot|x_i'(t)| = 0$$

Inoltre

$$\lim_{h\to 0}\left\langle Df(x(t)), \frac{x(t+h)-x(t)}{h}\right\rangle = \langle Df(x(t)), x'(t)\rangle$$

In conclusione:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(t+h)-F(t)}{h} = \langle Df(x(t)), x'(t)\rangle$$

▨

Indichiamo con $t=(t_1,\dots,t_m)$ una variabile di R^m e siano $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ n funzioni definite in un aperto B di R^m.
Siano, inoltre, le $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ derivabili parzialmente rispetto alla variabile t_J per qualche $J \in \{1, \dots, m\}$ in un punto $t \in B$.
Sia A aperto di R^n contenente il codominio $x(B)$ dell'applicazione $x: B \to R^n$
Sia $f: A \to R$ una funzione differenziabile nel punto $x(t)$.
Allora la funzione composta $F(t) \overset{def}{=} f(x(t))$ è definita in B e derivabile parzialmente nel punto t rispetto a t_J e la derivata vale:

$$\frac{\partial F}{\partial t_J}(t) = \langle Df(x(t)), \frac{\partial x}{\partial t_J}(t) \rangle = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x(t)) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t_J}(t)$$

Se poi $f, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ sono di classe C^1, anche $F(t)$ è di classe C^1 e quindi differenziabile in B.

99.. Grafico di funzioni in due variabili

mercoledì 5 gennaio 2022 16:42

Consideriamo le quattro funzioni:

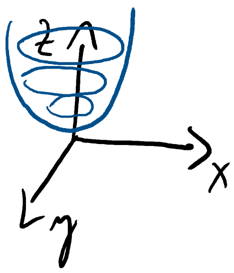
1) $f(x,y) = x^2 + y^2$

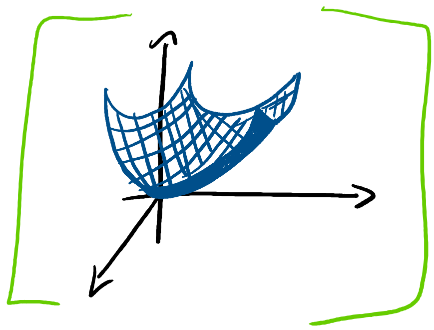
2) $g(x,y) = y^2 - x^2$

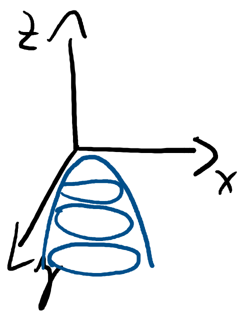
3) $h(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

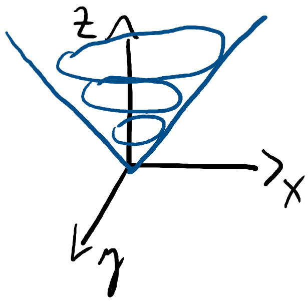
4) $k(x,y) = -(x^2 + y^2)$

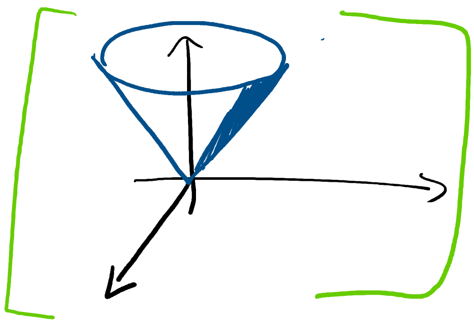
Si hanno 4 grafici:

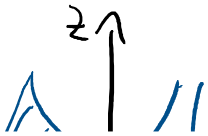
A)  $\left(f(x,y) = x^2 + y^2\right)$

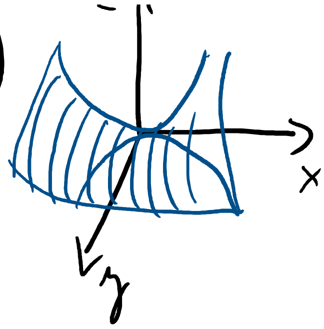


B)  $\left(k(x,y) = -(x^2 + y^2)\right)$

C)  $\left(h(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}\right)$



D)  $\left(g(x,y) = y^2 - x^2\right)$

D) 

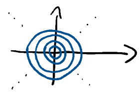
$(\ g(x,y) = y^2 - x^2)$

Consideriamo ora le <u>curve di livello</u>.

Fissiamo z_0 sull'asse z e consideriamo nel piano xy l'insieme delle preimmagini di z_0 (esempio: $f^{-1}(z_0)$ nel caso A [caso A di *99*])

Allora:

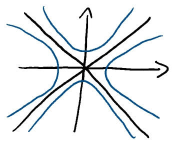
A) Se $z_0 < 0$ le curve di livello sono vuote
Se $z_0 = 0$ abbiamo l'origine
Se $z_0 > 0$ otteniamo delle circonferenze concentriche (di centro l'origine e raggio $\sqrt{z_0}$) $\Rightarrow$



B) succede la stessa cosa che accade in A ma invertendo i segni di z_0

C) succede la stessa cosa che accade in A ma con raggio $r = z_0$ e non $\sqrt{z_0}$

D) $y^2 - x^2 = z_0 \Rightarrow$ le curve di livello sono delle iperboli



∎

Sia $A=(a_{ij})$ una matrice quadrata $n \times n$ con $i,j \in \{1,\dots,n\}$

Sia $\lambda \in R^n$, è possibile considerare la quantità: SCRITTO COME VETTORE COLONNA

$$F(\lambda) = \langle A\cdot\lambda, \lambda\rangle \qquad \text{dove } \lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \overset{\text{EQUIVALENTE}}{\Longleftrightarrow} \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

$F: R^n \longrightarrow R$ e si può riscrivere nella forma:

$$F(\lambda) = \langle A\cdot\lambda, \lambda\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\lambda_i\lambda_j$$

$F(\lambda)$ ha il nome di <u>forma quadratica</u> associata alla matrice A.

102. Definizione di matrice definita, semidefinita e indefinita

giovedì 6 gennaio 2022 15:34

- Diremo che la forma quadratica è <u>definita positiva</u> se:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \lambda_i \lambda_j > 0 \quad \forall \lambda \in R^n \setminus \{\underline{0}\}$$

- Diremo che la forma quadratica è <u>semidefinita positiva</u> se:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \lambda_i \lambda_j \geqslant 0 \quad \forall \lambda \in R^n$$

- Diremo che la forma quadratica è <u>definita negativa</u> se:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \lambda_i \lambda_j < 0 \quad \forall \lambda \in R^n \setminus \{\underline{0}\}$$

- Diremo che la forma quadratica è <u>semidefinita negativa</u> se:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \lambda_i \lambda_j \leqslant 0 \quad \forall \lambda \in R^n$$

- Diremo che la forma quadratica è <u>indefinita</u> se:

$$\exists \lambda, \mu \in R^n \text{ t.c. } \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \lambda_i \lambda_j \geqslant 0 \quad e \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \mu_i \mu_j \leqslant 0$$

103. Teorema di caratterizzazione delle matrici definite (senza dimostrazione)

giovedì 6 gennaio 2022 15:42

Una matrice $A=(a_{ij})$ con $i,j \in \{1,\dots,n\}$ è definita positiva se e solo se $\exists m>0$ t.c. $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\lambda_i\lambda_j \geq m\,|\lambda|^2 \quad \forall \lambda \in R^n$

Una matrice $A=(a_{ij})$ con $i,j \in \{1,\dots,n\}$ è definita negativa se e solo se $\exists m>0$ t.c. $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\lambda_i\lambda_j \leq -m\,|\lambda|^2 \quad \forall \lambda \in R^n$

$\blacksquare$

104.. Teorema di caratterizzazione delle matrici 2x2 (senza dimostrazione)

giovedì 6 gennaio 2022 15:47

Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ una matrice simmetrica 2x2.

Sia $\det(A)$ il determinante di A, cioè $\det(A) = a_{22} \cdot a_{11} - (a_{12} \cdot a_{21}) \overset{\text{poiché è simmetrica}}{\Longrightarrow} \det(A) = a_{22} \cdot a_{11} - a_{12}^2$

Allora:

- Se $\det(A) > 0$, allora A è definita
- Se $\det(A) = 0$, allora A è semidefinita
- Se $\det(A) < 0$, allora A è indefinita

In particolare:

- Se $\det(A) > 0$ e $a_{11} > 0$, allora A è definita positiva
- Se $\det(A) > 0$ e $a_{11} < 0$, allora A è definita negativa
- Se $\det(A) = 0$ e $a_{11}, a_{22} \geq 0$, allora A è semidefinita positiva
- Se $\det(A) = 0$ e $a_{11}, a_{22} \leq 0$, allora A è semidefinita negativa

$\blacksquare$

105. Teorema delle funzioni a gradiente nullo

giovedì 6 gennaio 2022 16:04

Sia A un aperto connesso ed $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una funzione a gradiente nullo in A.
Allora f è costante.

DIM

Osserviamo che f è differenziabile, in quanto le derivate parziali (identicamente nulle) sono continue in A. (Per il teorema del differenziale totale)
Sappiamo che vale la relazione "differenziabilità $\Rightarrow$ continuità", dunque f è continua.

Fissiamo ora $x_1 \in A$ e riscriviamo A come unione di due insiemi, $A = A_1 \cup A_2$.
Dove $A_1 = \{x \in A \mid f(x) = f(x_1)\}$

$A_2 = \{x \in A \mid f(x) \neq f(x_1)\}$

Allora si ha che $A_1 \cap A_2 = \emptyset \overset{\text{PER IPOTESI DI A CONNESSO}}{\Longrightarrow} A_1 = \emptyset$ oppure $A_2 = \emptyset$
Sicuramente A_1 non è vuoto, infatti $x_1 \in A_1$ $[f(x_1) = f(x_1)]$
Dobbiamo mostrare che A_1 e A_2 sono entrambi aperti:

- A_2 è aperto perché per continuità di f può essere scritto come:

$$A_2 = f^{-1}\big((-\infty, f(x_1)) \cup (f(x_1), +\infty)\big)$$

- Mostriamo che $\exists B_\delta(x_1) \subseteq A_1$:

Consideriamo δ t.c. $B_\delta(x_1) \subset A$ e consideriamo la funzione $x(t) = x_1 + t(x - x_1)$ con $t \in [0,1]$
Si ha che $x(0) = x_1$ e $x(1) = x$
Possiamo considerare dunque la funzione $F(t) \overset{\text{def}}{=} f(x(t))$, si ha $F(0) = f(x_1)$ e $F(1) = f(x)$
Valutiamo $F'(t)$:

$F'(t) = \langle Df(x(t)), x'(t) \rangle = 0$ e quindi $F(t)$ è costante $\Rightarrow f(x) = f(x_1)$

$\Rightarrow$ Tesi

∎

106. Estremi relativi

venerdì 7 gennaio 2022 15:45

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e sia $x_0 \in A$.

Diremo che x_0 è:

- punto di <u>max relativo</u> $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists\, I_{\{x_0\}}$ t.c. $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in I_{\{x_0\}} \cap A$
- punto di <u>min relativo</u> $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists\, I_{\{x_0\}}$ t.c. $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in I_{\{x_0\}} \cap A$

$\blacksquare$

107.. Teorema: massimi e minimi relativi: condizione necessaria del primo ordine

venerdì 7 gennaio 2022 15:50

Se $f: A \subseteq R^n \to R$ è derivabile in un punto x_0 di max/min relativo interno ad A, allora $Df(x_0)=0$

DIM

Sia x_0 punto di min relativo.

Consideriamo la base canonica di R^n $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Per "i" fissato, consideriamo la curva $x(t) = x_0 + t \cdot e_i$.

Per $|t|$ sufficientemente piccolo, $x(t) = x_0 + t \cdot e_i \in A$, poiché x_0 è punto interno ad A

$\Rightarrow x_0 \in B_\delta(x_0) \subseteq A$

Consideriamo $F(t) = f(x(t))$, allora F è definita in un intorno di $t=0$ ed è derivabile.

Si ha

f è derivabile

$$F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underset{x(0)}{\underset{\parallel}{x_0}}) = 0$$

equivalente a "relativo"

$\Rightarrow 0$ è punto di minimo locale per F $\Rightarrow Df(x_0)=0$

$\blacksquare$

108. Definizione di matrice Hessiana

venerdì 7 gennaio 2022 16:05

La matrice Hessiana di una funzione reale di più variabili è una matrice quadrata i cui elementi sono le derivate parziali seconde della funzione f:

$$D^2 f = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & \cdots & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

$\blacksquare$

109. Teorema: massimi e minimi relativi: una condizione necessaria del secondo ordine

venerdì 7 gennaio 2022 16:13

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una funzione di classe C^2 in un intorno del punto x_0 di min (o max) relativo interno ad A.
Allora la matrice Hessiana $D^2 f(x_0)$ nel punto x_0 è semidefinita positiva (o negativa)

DIM

Sia x_0 punto di min relativo.

Fissiamo $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ e consideriamo la funzione $x(t) = x_0 + t\lambda$.

Ora, per $|t|$ sufficientemente piccolo si ha che $x(t) \in A$, dato che x_0 è punto interno ad A.

Consideriamo $F(t) = f(x(t))$, si ha che 0 è punto di min locale per $F(t)$.

Valutiamo $F'(t)$ e $F''(t)$:

- $F'(t) = \langle Df(x(t)), x'(t) \rangle = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x(t)) \cdot x_i'(t) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x(t)) \cdot \lambda_i$

- $F''(t) = \frac{d}{dt} F'(t) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x(t)) \cdot \lambda_i = \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x(t)) \cdot \lambda_i \lambda_j$

Da cui, valutando $F''(t)$ in $t=0$, si ha

$$F''(0) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x_0) \lambda_i \cdot \lambda_j \geq 0$$

$\Rightarrow$ La matrice Hessiana in x_0 è semidefinita positiva. ▨

110.. Corollario: massimi e minimi relativi: una condizione necessaria sulle derivate pure

venerdì 7 gennaio 2022 16:28

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe C^2 in un intorno di un punto x_0 di min (o max) relativo interno ad A.
Allora si ha che:

$$f_{x_i x_i}(x_0) \geq 0 \qquad \left(o \;\; f_{x_i x_i}(x_0) \leq 0\right) \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

DIM

Sia x_0 punto di min locale.
Sappiamo che la matrice Hessiana è semidefinita positiva, cioè

$$0 \leq \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x_0)\, \lambda_i \lambda_j \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n$$

Scegliendo allora $\lambda = e_i$, dove e_i è elemento della base canonica di $\mathbb{R}^n$, si ha che:

$$0 \leq f_{x_i x_i}(x_0) \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

∎

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 in un intorno di x_0, punto critico di f interno ad A.
Se la matrice Hessiana $D^2 f(x_0)$ è definita positiva $\Rightarrow$ il punto x_0 è di min relativo per f in A.
Se la matrice Hessiana $D^2 f(x_0)$ è definita negativa $\Rightarrow$ il punto x_0 è di max relativo per f in A.
Se la matrice Hessiana $D^2 f(x_0)$ è indefinita $\Rightarrow$ il punto x_0 non è né di max né di min relativo.

DIM

- Consideriamo il caso in cui la matrice Hessiana $D^2 f(x_0)$ sia definita positiva.

Per il Teorema di caratterizzazione delle matrici definite, si ha che $\exists\, m > 0$ t.c. $\langle D^2 f(x_0)\cdot\lambda, \lambda\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x_0)\lambda_i\lambda_j \geq m\cdot|\lambda|^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n$

Per ipotesi x_0 è punto critico per $f \Rightarrow Df(x_0) = 0$

Utilizzando la formula di Taylor al secondo ordine con il resto di Peano, si ha:

$$f(x_0+\lambda) - f(x_0) = \underbrace{\langle Df(x_0), \lambda\rangle}_{0} + \frac{1}{2}\langle D^2 f(x_0)\lambda, \lambda\rangle + o(|\lambda|^2) \geq \frac{m}{2}|\lambda|^2 + o(|\lambda|^2) \geq |\lambda|^2\left(\frac{m}{2} + \frac{o(|\lambda|^2)}{|\lambda|^2}\right)$$

Passando al limite per $\lambda \to 0$, si ha che $\lim_{\lambda\to 0}\frac{o(|\lambda|^2)}{|\lambda|^2} = 0$. Dunque $\exists\, \delta > 0$ t.c. $\frac{o(|\lambda|^2)}{|\lambda|^2} < \frac{m}{4} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n$ con $|\lambda| < \delta$

Per cui, in conclusione, si ha:

$$f(x_0+\lambda) - f(x_0) \geq |\lambda|^2\left(\frac{m}{2} + \frac{o(|\lambda|^2)}{|\lambda|^2}\right) \geq |\lambda|^2\left(\frac{m}{2} - \frac{m}{4}\right) \geq |\lambda|^2\frac{m}{4} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n,\ |\lambda| < \delta$$

$\Rightarrow x_0$ è punto di min per f

- Se la matrice Hessiana è indefinita, per la condizione necessaria del secondo ordine si ha la tesi

$\blacksquare$

112. Definizione di Hessiano

sabato 8 gennaio 2022 15:53

Data una funzione $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ t.c. $f \in C^2(A)$, chiameremo <u>Hessiano</u> il determinante della matrice Hessiana $D^2 f$, cioè

$$H_f(x,y) = \det\left(D^2 f(x,y)\right) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - \left(f_{xy}(x,y)\right)^2$$

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 in un intorno di (x_0, y_0) punto interno di A.

- Se risulta
$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0 \\ H_f(x_0,y_0) > 0, \ f_{xx}(x_0,y_0) > 0 \end{cases} \Longrightarrow (x_0,y_0) \text{ è punto di min relativo per } f \text{ in } A$$

- Se risulta
$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0 \\ H_f(x_0,y_0) > 0, \ f_{xx}(x_0,y_0) < 0 \end{cases} \Longrightarrow (x_0,y_0) \text{ è punto di max relativo per } f \text{ in } A.$$

- Se risulta
$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0 \\ H_f(x_0,y_0) < 0 \end{cases} \Longrightarrow (x_0,y_0) \text{ è punto critico ma non è né di max né di min relativo per } f \text{ in } A.$$

DIM

- Supponiamo che vale il sistema $\begin{cases} f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0 \\ H_f(x_0,y_0) > 0, \ f_{xx}(x_0,y_0) > 0 \end{cases}$

Dunque (x_0,y_0) è punto critico e per il teorema di caratterizzazione delle matrici 2x2 si ha che la matrice Hessiana è definita positiva.
Pertanto, per il teorema sulla condizione necessaria nel caso di n variabili, f possiede min relativo in (x_0,y_0)

- Supponiamo che vale il sistema $\begin{cases} f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0 \\ H_f(x_0,y_0) > 0, \ f_{xx} < 0 \end{cases}$

Analogamente al caso precedente si ha che la matrice Hessiana è definita negativa.
Pertanto possiede max relativo in (x_0,y_0)

- Supponiamo che vale il sistema $\begin{cases} f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0 \\ H_f(x_0,y_0) < 0 \end{cases}$

Per il teorema di caratterizzazione delle matrici 2x2 la matrice Hessiana è indefinita.
Pertanto per il teorema sulla condizione sufficiente e necessaria nel caso di n variabili si ha che (x_0,y_0) non è punto né di min né di max relativo per f in A.

$\blacksquare$

114. Formula di Taylor in R^n

sabato 8 gennaio 2022 16:25

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe $C^K(A)$, con A aperto.

Siano $x, x+h$ t.c. $[x, x+h] \in A$ con $h = (h_1, \dots, h_n) \neq \underline{0}$

Consideriamo la curva $x(t) = x + th$, $t \in [0,1]$ $\Longrightarrow$ $x(0) = x$, $x(1) = x + h$

Consideriamo $F(t) = f(x(t))$, cioè

$$F : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \to f(x(t)) = f(x+th)$$

Allora si ha:

$$F'(t) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x+th) \cdot h_i$$

$$F''(t) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x+th) \cdot h_i h_j$$

$$F'''(t) = \sum_{i,j,k=1}^{n} f_{x_i x_j x_k}(x+th) \cdot h_i h_j \cdot h_k$$

$$\vdots$$

$$F^K(t) = \sum_{i_1, \dots, i_K = 1}^{n} f_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_K}}(x+th)\, h_{i_1} h_{i_2} \cdot \ldots \cdot h_{i_K}$$

Possiamo allora scrivere il polinomio di Taylor di grado K con resto di Lagrange nel seguente modo:

$$F(1) = F(0) + \sum_{i=1}^{K-1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} + \frac{F^{(K)}(\theta)}{K!} \qquad \text{dove } \theta \in (0,1)$$

115. Teorema: formula di Taylor col resto di Lagrange (caso n=1, n=2 con dimostrazione e caso n=k senza dimostrazione)

sabato 8 gennaio 2022 16:41

• $n=1$

Sia f una funzione di classe $C^1(A)$.

Siano $x, x+h \in A$ t.c. il segmento $[x, x+h] \in A$, con $h \neq \underline{0}$

Allora $\exists$ un numero reale $\theta \in (0,1)$ dipendente da x e h t.c.

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x+\theta h) \cdot h_i = f(x) + \langle Df(x+\theta h), h \rangle$$

DIM

Sappiamo che:

$$F(1) = F(0) + F'(\theta) \quad \text{con } \theta \in (0,1).$$

Dunque

Per il Teorema di derivazione delle funzioni composte

$$f(x+h) = f(x) + \langle Df(x+\theta h), h \rangle = f(x) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x+\theta h) \cdot h_i$$

• $n=2$

Sia f una funzione di classe $C^2(A)$.

Siano $x, x+h \in A \subseteq \mathbb{R}^n$ t.c. il segmento $[x, x+h] \subseteq A$.

Allora $\exists$ un numero reale $\theta \in (0,1)$ dipendente da x e h t.c.

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x) \cdot h_i + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x+\theta h) \cdot h_i \cdot h_j = f(x) + \langle Df(x), h \rangle + \frac{1}{2} \langle D^2 f(x+\theta h) \cdot h, h \rangle$$

DIM

Sappiamo che:

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(\theta)}{2} \qquad \text{con } \theta \in (0,1)$$

Dunque

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x+\theta h) \cdot h_i h_j = f(x) + \langle Df(x), h \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x+\theta h) h_i h_j$$

Osserviamo che:

$$D^2 f(x+\theta h) \cdot h = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(x+\theta h) & \cdots & f_{x_1 x_n}(x+\theta h) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_n x_1}(x+\theta h) & \cdots & f_{x_n x_n}(x+\theta h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} f_{x_1 x_i}(x+\theta h) \cdot h_i \\ \vdots \\ \sum f \quad (x+\theta h) \end{pmatrix}$$

$$D^2 f(x+\theta h)\cdot h = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ f_{x_n x_1}(x+\theta h) & \cdots & f_{x_n x_n}(x+\theta h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} f_{x_n x_i}(x+\theta h)\cdot h_i \end{pmatrix}$$

Moltiplichiamo di nuovo per h:

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_i \cdot h_j = \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x+\theta h)\cdot h_i \cdot h_j$$

- $n = K$

Sia f una funzione di classe $C^K(A)$ con $K \in \mathbb{N}$

Siano $x, x+h \in A \subseteq \mathbb{R}^n$ t.c. il segmento $[x, x+h] \subseteq A$

Allora $\exists\, \theta \in (0,1)$ dipendente da x e h t.c.

$$f(x+h) = f(x) + \partial f(x) + \frac{1}{2}\partial^2 f(x) + \ldots + \frac{1}{(K-1)!}\partial^{(K-1)} f(x) + \frac{1}{K!}\partial^K f(x+\theta h)$$

$\blacksquare$

116.. Teorema: formula di Taylor del secondo ordine col resto di Peano (dimostrazione facoltativa)

sabato 8 gennaio 2022 17:09

Sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^k(A)$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto

Siano $x, x+h \in A$ t.c. il segmento $[x, x+h] \subseteq A$.

Allora

$$f(x+h) = f(x) + \langle Df(x), h \rangle + \frac{1}{2} \langle D^2 f(x) h, h \rangle + o(|h|^2)$$

$\blacksquare$

Siano $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$. Possiamo considerare il segmento che unisce x_1 e x_2, $[x_1, x_2]$, ossia gli $x \in \mathbb{R}^n$ t.c.

$$x = t x_1 + (1-t) x_2 \qquad \text{con } t \in [0,1]$$

- Diremo che un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è <u>convesso</u> $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall x_1, x_2 \in A$ il segmento $[x_1, x_2] \subset A$

- Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con A convesso.
Diremo che f è una <u>funzione convessa</u> $\overset{def}{\Longleftrightarrow} f(t x_1 + (1-t) x_2) \leq t f(x_1) + (1-t) f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in A$ e $\forall t \in [0,1]$

■

118.. Teorema: criterio di convessità per le funzioni differenziabili (dimostrazione facoltativa)

domenica 9 gennaio 2022 11:13

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenziabile in A, con A aperto convesso.

Allora

$$f \text{ è convessa in } A \iff f(x) \geq f(x_0) + \langle Df(x_0), (x-x_0) \rangle \quad \forall x, x_0 \in A$$

oppure

$$f \text{ è convessa in } A \iff \langle (Df(y) - Df(x)), (y-x) \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in A$$

$\blacksquare$

Sia A aperto connesso di R^n.
Sia $f: A \subseteq R^n \to R$ una funzione di classe $C^2(A)$.

Allora
f è convessa in $A \iff$ la matrice Hessiana $D^2 f(x)$ è semidefinita positiva $\forall x \in A$

DIM

$\Leftarrow$): Siano $x_0, x \in A$.
Utilizzando la formula di Taylor con resto di Lagrange del II ordine si ha:

$$f(x) = f(x_0) + \langle Df(x_0), (x-x_0)\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2 f(x_0+\theta(x-x_0))\cdot(x-x_0), (x-x_0)\rangle \qquad \text{con } \theta \in (0,1)$$

Dato che la matrice hessiana $D^2 f$ è semidefinita positiva e dato che $x_0+\theta(x-x_0) = \theta x + (1-\theta)x_0 \in A$ [$x+(1-\theta)x_0 \in A$ perché è una combinazione convessa di x_0, x che sono punti appartenenti ad A]
Si ha che:

$$f(x) - f(x_0) - \langle Df(x_0), (x-x_0)\rangle = \frac{1}{2}\langle D^2 f(x_0+\theta(x-x_0))\cdot(x-x_0), (x-x_0)\rangle \geq 0$$

Per il criterio di convessità per le funzioni differenziabili $\Rightarrow$ f è convessa in A.

$\Rightarrow$): Viceversa, consideriamo la funzione $\varphi(t) \overset{def}{=} f(x(t)) = f(x_0+t\lambda)$ con λ valore fissato.
Dato che A è aperto $\exists B_\delta(x_0) \subset A$.
Osserviamo che φ è definita per $|t|<\delta$, cioè φ è una funzione di una variabile definita in un intorno dello 0.
Se φ è derivabile due volte $\Rightarrow \varphi''(0) \geq 0$

Ora x_0 può essere scritto come:

$$x_0 = \frac{x_0}{2} + \frac{x_0}{2} + \frac{t\lambda}{2} - \frac{t\lambda}{2} = \frac{x_0}{2} + \frac{t\lambda}{2} + \frac{x_0}{2} - \frac{t\lambda}{2} = \frac{x_0+t\lambda}{2} + \frac{x_0-t\lambda}{2} = \frac{1}{2}(x_0+t\lambda) + \frac{1}{2}(x_0-t\lambda)$$

Dato che f è convessa, si ha:

$$f(x_0) \leq \frac{1}{2} f(x_0+t\lambda) + \frac{1}{2} f(x_0-t\lambda)$$

$$\Rightarrow f(x_0) \leq \frac{f(x_0+t\lambda)+f(x_0-t\lambda)}{2} \Rightarrow 2f(x_0) \leq f(x_0+t\lambda) + f(x_0-t\lambda) \Rightarrow 0 \leq f(x_0+t\lambda) + f(x_0-t\lambda) - 2f(x_0)$$

Dividiamo ora per t^2, con $t \neq 0$:

$$0 \leq \frac{f(x_0+t\lambda)+f(x_0-t\lambda)-2f(x_0)}{t^2}$$

Passando al limite per $t \to 0$ si ha:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t\lambda)+f(x_0-t\lambda)-2f(x_0)}{t^2} = \frac{\langle Df(x_0+t\lambda), \lambda\rangle - \langle Df(x_0-t\lambda), \lambda\rangle}{2t} = \frac{\langle D^2 f(x_0+t\lambda)\cdot\lambda, \lambda\rangle + \langle D^2 f(x_0-t\lambda)\cdot\lambda, \lambda\rangle}{2} \Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{1}{2}\langle D^2 f(x_0+t\lambda)\cdot\lambda, \lambda\rangle + \langle D^2 f(x_0-t\lambda)\cdot\lambda, \lambda\rangle = \langle$$

In conclusione:

$$\langle D^2 f(x_0)\cdot\lambda, \lambda\rangle \geq 0$$

$\Rightarrow D^2 f(x_0)$ è semidefinita positiva.

∎

$D^2 f(x_0)\cdot\lambda, \lambda >$

120.. Definizione di cono e di funzione omogenea

domenica 9 gennaio 2022 16:23

- Diremo che l'insieme C è un cono in R^n se accade che

$$\lambda x \in C \qquad \forall x \in C \ \text{e} \ \forall \lambda \in (0, +\infty)$$

- Diremo che $f: A \subseteq R^n \to R$, con A cono, è <u>positivamente omogenea</u> $\overset{def}{\iff} f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad \forall x \in A, \forall \lambda > 0$
- Diremo che $f: A \subseteq R^n \to R$, con A cono, è <u>positivamente omogenea di ordine α</u> $\overset{def}{\iff} f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x) \quad \forall x \in A, \forall \lambda > 0$

121. Locale Lipshitzianità (senza dimostrazione)

domenica 9 gennaio 2022 16:30

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $\mathring{A} \neq \emptyset$.

Sia $f: A \to \mathbb{R}$ convessa.

Allora f è localmente Lipschitziana in A

Diremo che $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $\mathring{A} \neq \emptyset$ è localmente Lipschitziana in A se $\forall x_0$ interno ad A $\exists B_\delta(x_0)$ ed $\exists L = L(x_0, \delta) > 0$ t.c. $\forall x_1, x_2 \in B_\delta(x_0)$ si ha $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L \cdot |x_1 - x_2|$

122.. Teorema di Eulero (dimostrazione facoltativa)

domenica 9 gennaio 2022 16:36

Sia $f : A \to R$ una funzione differenziabile su un cono aperto $A \subseteq R^n$.

Allora

f è positivamente omogenea di ordine α su A $\iff$ $\overbrace{< Df(x), x > = \alpha f(x)}^{\text{IDENTITÀ DI EULERO}}$ $\forall x \in A$

123. Teorema sul gradiente di una funzione omogenea

domenica 9 gennaio 2022 16:40

Sia $f: A \to R$ una funzione derivabile su un cono aperto $A \subseteq R^n$.

Se f è omogenea di grado α su A.

Allora

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$ la derivata parziale f_{x_i} è una funzione omogenea di grado $\alpha - 1$ su A.

DIM

Fissiamo $t > 0$.

Si ha:

$$f(tx) = t^\alpha f(x) \Rightarrow f(t \cdot x) - t^\alpha f(x) = 0 \qquad \forall x \in A$$

Deriviamo ora rispetto alla variabile x_i, si ha:

$$f_{x_i}(tx) \cdot t - t^\alpha f_{x_i}(x) = 0$$

$$\Rightarrow f_{x_i}(tx) \cdot t = t^\alpha f_{x_i}(x) \Rightarrow f_{x_i}(tx) = t^{\alpha - 1} f_{x_i}(x)$$

$\blacksquare$

In Analisi 1 abbiamo visto che possiamo considerare la seguente funzione:

$$F(x) = \int_a^{h(x)} f(t)\, dt$$ dove h è una funzione derivabile.

Abbiamo che

$$F'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x)$$

In modo analogo possiamo considerare

$$F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\, dt$$ con h, g funzioni derivabili

Si ha

$$F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) - f(h(x)) \cdot h'(x)$$

Abbiamo usato:
- Teorema fondamentale del calcolo integrale
- la regola di derivazione delle funzioni composte
- le proprietà fondamentali del calcolo di Reimann

- Passiamo ora al caso di più variabili:

Sia $\Phi : A \subseteq R^n \to R$, con A aperto di R^n e sia $x \in A$.

Consideriamo la seguente funzione <u>definita tramite integrali</u>:

$$\Phi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t, x)\, dt$$ dove $\alpha, \beta : A \to R$ e $f : R^{n+1} \to R$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Sia $f: A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $n+1$ variabili. Siano $\alpha, \beta: A \to \mathbb{R}$ due funzioni continue in A.
Allora
$\Phi : A \to \mathbb{R}$ è continua in A.

$\blacksquare$

126. Differenziabilità delle funzioni definite mediante integrali (senza dimostrazione)

lunedì 10 gennaio 2022 09:54

Sia $f: A \times R \to R$ continua di $n+1$ variabili reali di classe C^1 rispetto ad $x \in A$ (cioè, f_{x_i} continue in $A \times R$ $\forall i \in \{1, \dots, n+1\}$)

Siano $\alpha, \beta: A \to R$ funzioni di classe $C^1(A)$.

Allora la funzione integrale $\Phi: A \to R$ è di classe $C^1(A)$ e le componenti Φ_{x_i} del gradiente $D\Phi$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ valgono:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x) = f(x, \beta(x)) \cdot \frac{\partial \beta}{\partial x_i}(x) - f(x, \alpha(x)) \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t)\, \partial t$$

127. Funzioni armoniche

lunedì 10 gennaio 2022 10:02

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto.

Diremo che $u \in C^2(\Omega)$ è una <u>funzione armonica</u> in Ω se accade che

$$\Delta u(x) = 0 \qquad \forall x \in \Omega$$ [Equazione di Laplace]

Laplaciano

dove il laplaciano di u è definito nel seguente modo:

$$\Delta u \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

128.. Principio del massimo per funzioni armoniche (senza dimostrazione)

lunedì 10 gennaio 2022 10:10

Sia Ω aperto e limitato di R^n e sia $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ una funzione armonica in Ω.

Siano m, M il minimo e il massimo di u su $\underbrace{\partial\Omega}_{\text{frontiera di } \Omega}$

Allora si ha:

$$m \leq u(x) \leq M \qquad \forall x \in \bar{\Omega}$$

∎

129. Teorema di unicità per il problema di Dirichlet

lunedì 10 gennaio 2022 10:17

Sia Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^n$.

Date due funzioni $f, g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, il problema

$$(D): \begin{cases} \Delta u(x) = f(x) & , x \in \Omega \\ u(x) = g(x) & , x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Possiede al più una soluzione $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$

DIM

Siano u_1, u_2 due soluzioni di classe $C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ di (D).

Osserviamo che se consideriamo $w \overset{def}{=} u_1 - u_2$ si ha:

$$\Delta w = \Delta(u_1 - u_2) = \Delta u_1 - \Delta u_2 = f - f = 0$$

ossia $\Delta w(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$

$\Longrightarrow w \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ è armonica su Ω.

Ora, valutiamo w su $\partial\Omega$:

$$w(x) = u_1(x) - u_2(x) = g(x) - g(x) = 0 \qquad \forall x \in \partial\Omega$$

Dunque w soddisfa il seguente problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{su } \Omega \\ w = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \xrightarrow{\text{Per il PRINCIPIO DEL MASSIMO}} 0 \leq w(x) \leq 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega} \overset{def}{\Longleftrightarrow} u_1(x) = u_2(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega}$$

$\blacksquare$

130. Funzioni a valori vettoriali

lunedì 10 gennaio 2022 12:02

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $f: A \to \mathbb{R}^m$ con $n, m \in \mathbb{N}$.

$$\underline{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow (f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

dove $f_i: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una funzione scalare $\forall i \in \{1, \dots, m\}$

Questa è una <u>funzione a valori vettoriali</u>

$\blacksquare$

131.. Continuità e derivabilità delle funzioni vettoriali

martedì 11 gennaio 2022 23:07

- $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è <u>continua</u> in $x_0 \in A$ $\iff$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ $\iff$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ t.c. $\forall x$ con $0 \leq |x - x_0|_n < \delta \implies |f(x) - f(x_0)|_m < \varepsilon$ $\iff$ le f_i sono continue.

- Se esistono tutte le derivate parziali $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ (con $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$) posso considerare la seguente matrice Jacobiana:

$$Df = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad \text{(matrice } m \times n\text{)}$$

cioè se $\exists$ tutte le derivate parziali $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$

Se $\exists Df$ f è <u>derivabile</u>

132. Teorema di differenziabilità per le funzioni vettoriali (senza dimostrazione)

martedì 11 gennaio 2022 23:22

La funzione vettoriale $f: A \subseteq R^n \longrightarrow R^m$ di componenti f_α, con $\alpha = 1, \dots, m$, è differenziabile in un punto x_0 dell'aperto A se e solo se sono differenziabili le componenti scalari $f_\alpha : A \longrightarrow R$ $\forall \alpha \in \{1, \dots, m\}$.

Se, inoltre, f è differenziabile in A, il differenziale $df(x)$ calcolato per $h \in R^n$ è il vettore di R^m di componenti $d_\alpha f(x)$, con $\alpha = 1, \dots, m$, ossia:

$$d_\alpha f(x) = \left(df_1(x)(h), \dots, df_m(x)(h) \right)$$

133.. Teorema di rappresentazione del gradiente delle funzioni composte vettoriali (senza dimostrazione)

mercoledì 12 gennaio 2022 11:07

Sia $g: B \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow g(B) \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n$

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

Siano g, f funzioni di classe C^1.

Allora $F \stackrel{def}{=} f \circ g$ è di classe C^1 ed è differenziabile; il suo gradiente DF è uguale al prodotto fra matrici:

$$DF = Df \cdot Dg$$

$\blacksquare$

134.

mercoledì 12 gennaio 2022 11:12

Consideriamo la seguente equazione:

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

dove $F: U \subseteq \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{R}$, con U aperto.

Nella equazione $F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, y è una funzione nella variabile t.

L'equazione $F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ prende il nome di <u>equazione differenziale</u> di ordine n (n è l'ordine massimo che compare in $F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$)

- Possiamo anche considerare il caso dei sistemi:

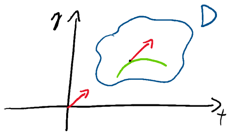
$$\begin{cases} y_1^{(n_1)} = f_1(t, y_1, \dots, y_K, y_1', \dots, y_1^{(n_1-1)}, y_2', \dots, y_2^{(n_2-1)}, \dots, y_K', \dots, y_K^{(n_K-1)}) \\ \vdots \\ y_K^{(n_K)} = f_K(t, y_1, \dots, y_K, y_1', \dots, y_1^{(n_1-1)}, y_2', \dots, y_2^{(n_2-1)}, \dots, y_K', \dots, y_K^{(n_K-1)}) \end{cases}$$

Diremo che il sistema in forma normale è di ordine n_K per l'equazione y_K.
Più semplicemente poniamo l'ordine del sistema come il $\max\{n_1, \dots, n_K\}$

Consideriamo l'equazione differenziale:

$$y' = f(t,y)$$

con f definita in un aperto $D \subseteq R^2$



Al generico punto $(t,y) \in D$ possiamo associare un vettore $\left(\overset{t'}{\overset{\shortparallel}{1}}, \overset{y'}{\overset{\shortparallel}{f(t,y)}}\right)$ traslato però nel punto.

Pertanto tramite l'equazione $y' = f(t,y)$, ad ogni punto di D possiamo associare un vettore, cioè il <u>vettore tangente la curva soluzione nel punto</u>.

Posso pertanto costruire su D un campo vettoriale detto <u>campo delle direzioni</u>

137.. Problemi di Cauchy

mercoledì 12 gennaio 2022 15:10

$$(P.C.)\begin{cases} y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) & \text{] E.D.O. di ordine } n \\ y(t_0) = \xi_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = \xi_{n-1} \end{cases}$$

Condizioni (o dati) iniziali con $\xi_0, \dots, \xi_{n-1}$ fissati $\in R$

Nei sistemi il tutto si formula nel seguente modo:

$$(P.C.)\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = \xi_0 \end{cases} \qquad \text{con } t_0 \in R,\ \xi \in R^n \text{ fissati}$$

In entrambi i casi la soluzione è definita almeno in un intorno del punto $t_0 \in R$

$\blacksquare$

138. Lemma di equivalenza fra le soluzioni di un problema di Cauchy e le soluzioni dell'equazione di Volterra associata

mercoledì 12 gennaio 2022 15:18

Sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, con D aperto.

Se:

- f è continua in D
- f è localmente lipschitziana in D rispetto ad y uniformemente in t
- $\varphi \in C^1(I_\delta)$ è soluzione del (P.C.)

Sono le stesse ipotesi del teorema di $\exists!$ locale;
Allora $\forall (\tau, \xi) \in D \ \exists \ I_\delta = [\tau-\delta, \tau+\delta]$ nel quale è definita una soluzione φ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = f(t, y \\ y(\tau) = \xi \end{cases}$

Allora φ soddisfa la seguente equazione integrale di Volterra:

$$y(t) = \xi + \int_\tau^t f(s, y(s))\, ds \qquad \forall t \in I_\delta$$

(EQUAZIONE DI VOLTERRA)

Viceversa, se $\varphi \in C(I_\delta)$ è soluzione dell'equazione di Volterra, essa è anche soluzione del (P.C.)

DIM

Se $\varphi \in C^1(I_\delta)$ è soluzione del problema di Cauchy $\Rightarrow \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \forall t \in \underset{[\tau-\delta,\tau+\delta]}{I_\delta}$ e $\varphi(\tau) = \xi$

Ora

$$\int_\tau^t \varphi'(s)\, ds = \int_\tau^t f(s, \varphi(s))\, ds \overset{\text{TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE}}{\iff} \varphi(t) - \varphi(\tau) = \int_\tau^t f(s, \varphi(s))\, ds \iff \varphi(t) = \xi + \int_\tau^t f(s, \varphi(s))\, ds \qquad \forall t \in I_\delta$$

Sia ora $\varphi \in C(I_\delta)$ soluzione dell'equazione di Volterra, ossia

$$\varphi(t) = \xi + \int_\tau^t f(s, \varphi(s))\, ds$$

Ora il membro di destra è derivabile per il teorema fondamentale del calcolo integrale, e quindi si ha che φ è derivabile:

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \qquad \forall t \in I_\delta$$

Inoltre ponendo $t = \tau$ in $\varphi(t) = \xi + \int_\tau^t f(s, \varphi(s))\, ds$ si ha che:

$$\varphi(\tau) = \xi + 0 = \xi$$

$\Rightarrow \varphi$ è soluzione del (P.C.)

139. Dimostrazione del Teorema di esistenza ed unicità locale

mercoledì 12 gennaio 2022 15:42

Sia $f: D \subseteq R^{n+1} \to R^n$.

Se:

- f è continua in D
- f è localmente lipschitziana in D rispetto ad y uniformemente in t

Allora $\forall (\tau, \xi) \in D\ \exists \overset{\text{intorno di } \tau}{I_\delta} = [\tau-\delta, \tau+\delta]$ nel quale è definita una soluzione φ del problema di Cauchy:

$$(P.C)\ \begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(\tau) = \xi \end{cases}$$

Tale soluzione è unica nel senso che ogni altra soluzione coincide con φ nell'intervallo di definizione

DIM

Ci serve (per Banach-Caccioppoli) un operatore opportuno in uno spazio metrico opportuno.

Una prima possibilità è di considerare lo spazio $C(I_\delta)$ e l'operatore $F[y](t) = \xi + \int_\tau^t f(s, y(s))\,ds$

Un primo problema che affrontiamo è che i grafici delle funzioni in $C(I_\delta)$ possono "uscire" da D

Consideriamo a questo punto $\Gamma \overset{def}{=} \{(t,y) \in R^{n+1} \mid \overset{\text{modulo}}{|t-\tau|} \leq a \text{ e } \overset{\text{norma in } R^n}{|y-\xi|} \leq b\}$ che è un compatto di R^{n+1} (a, b dipendono da ξ e τ)

Scegliamo $a, b \in R_+$ t.c. $\Gamma \subset D$

Consideriamo lo spazio metrico $Y \overset{def}{=} \{y \in C(I_\delta) \mid \overset{|y(t)-\xi|}{d(y, \xi)} \leq b\}$ dove $d(z, w) \overset{def}{=} \sup_{t \in I_\delta} |z(t) - w(t)|$

- La prima richiesta su δ è che $\delta \leq a$, vediamo che $F(Y) \subset Y$:

$$d(F(y), \xi) \overset{def}{=} \sup_{t\in I_\delta} \left|\xi + \int_\tau^t f(s,y(s)) - \xi\right| = \sup_{t\in I_\delta} \left|\int_\tau^t f(s,y(s))\,ds\right| \leq \sup_{t\in I_\delta} \left|\int_\tau^t |f(s,y(s))|\,ds\right| \leq \sup_{t\in I_\delta} \left|\int_\tau^t M\,ds\right| \leq M\cdot\delta \leq b \quad \text{dove } M \overset{def}{=} \sup_{(t,y)\in\Gamma} |f(t,y)|$$

$\Rightarrow \delta \leq \frac{b}{M}$] 2° condizione

- Vediamo ora che F è una contrazione:

$$|F[y](t) - F[z](t)| = \left|\xi + \int_\tau^t f(s,y(s))ds - \xi - \int_\tau^t f(s,z(s))ds\right| = \left|\int_\tau^t f(s,y(s)) - f(s,z(s))\,ds\right| \leq \left|\int_\tau^t |f(s,y(s)) - f(s,z(s))|\,ds\right| \overset{f \text{ è localmente lipschitziana}}{\leq} \left|\int_\tau^t L\cdot d(y,z)\right| \leq L\cdot d(y,z)\cdot\delta$$

$\Rightarrow \sup_{t\in I_\delta} |F[y](t) - F[z](t)| \leq \delta\cdot L\cdot d(y,z)$ dove L è la costante di lipschitzianità sul compatto Γ

- La terza condizione su δ è che $\delta \leq \frac{1}{L}$:

  Scelgo $\delta < \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\}$

Allora (Per Banach-Caccioppoli) $\exists!\, \varphi \in C(I_\delta)$ t.c. $F[\varphi] = \varphi$

$\overset{\text{lemma}}{\Rightarrow} \exists!$ soluzione del (P.C.)

Il teorema di Banach-Caccioppoli ci offre una procedura iterativa per costruire la nostra soluzione. (riferito alla soluzione del (P.C.))
Partiamo dalla funzione $\varphi_0(t) = \xi$.
Consideriamo poi: $\varphi_1(t) \stackrel{def}{=} F[\varphi_0](t) = \xi + \int_\tau^t f(s, \varphi_0(s))\, ds$

$$\varphi_2(t) \stackrel{def}{=} F[\varphi_1](t)$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n(t) \stackrel{def}{=} \xi + \int_\tau^t f(s, \varphi_{n-1}(s))\, ds$$

Queste $\{\varphi_n\}$ sono dette <u>iterate di Picard</u>

$\blacksquare$

Se $f \in C^0(I_\delta)$, la soluzione φ del (P.C.) $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(\tau) = \xi \end{cases}$ appartiene a $C^1(I_\delta)$.

In generale, $f \in C^K(I_\delta) \Rightarrow \varphi \in C^{K+1}(I_\delta)$ e vale anche $f \in C^\infty(I_\delta) \Rightarrow \varphi \in C^\infty(I_\delta)$

142. Teorema delle contrazioni per le iterate (senza dimostrazione)

mercoledì 12 gennaio 2022 16:32

Sia $X \neq \emptyset$ uno spazio metrico completo e sia $F: X \to X$

Se $F^K = \underbrace{F \circ F \circ \ldots \circ F}_{K \text{ volte}}$ è una contrazione

Allora $\exists!$ punto fisso per F

$\blacksquare$

[Questo teorema è anche detto: "Teorema di Banach-Caccioppoli per le iterate"]

143.. Miglioramento del teorema di esistenza ed unicità locale (dimostrazione facoltativa)

mercoledì 12 gennaio 2022 21:16

Nel teorema di $\exists!$ locale abbiamo preso $\delta < \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\}$.

Si può mostrare che (col teorema di Banach-Caccioppoli) si può prendere $\delta = \min\{a, \frac{b}{M}\}$

$\blacksquare$

144.

mercoledì 12 gennaio 2022 21:22

145. Soluzione massimale

mercoledì 12 gennaio 2022 21:22

Diremo che la soluzione φ del (P.C.)

$$(P.C.) \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(\tau) = \xi \end{cases}$$

è una <u>soluzione massimale</u> se essa è definita in un intervallo (T_{min}, T_{max}) e non è possibile prolungarla ulteriormente.

$\blacksquare$

146.. Teorema di Peano (senza dimostrazione)

mercoledì 12 gennaio 2022 21:23

Sia $f: D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, con D aperto.

Se f è continua in D, allora $\forall (\tau, \xi) \in D$ $\exists$ I_δ di τ nel quale è definita una soluzione del

$$(P.C.) \begin{cases} \gamma' = f(t, \gamma) \\ \gamma(\tau) = \xi \end{cases}$$

Sia $S \overset{def}{=} (\tau_1, \tau_2) \times \mathbb{R}^n$.

Supponiamo che f sia definita in $\bar{S}$ e che in S valgano le ipotesi del teorema di $\exists!$ locale.

Supponiamo che $\exists K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ con $K_1 \geq 0$, $K_2 \geq 0$ t.c. $\underbrace{|f(t,y)| \leq K_1 + K_2 |y|}_{\text{Sublinearità}}$ $\quad \forall t, y \in S$

Allora

$\forall (\tau, \xi) \in S$, $\varphi(t; \tau, \xi)$ è definita in $[\tau_1, \tau_2]$

DIM

Prendiamo $n=1$

Sia $(\tau, \xi) \in S$.

Consideriamo $\Gamma \overset{def}{=} \{ (t,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |t-\tau| \leq a \text{ e } |y-\xi| \leq b \}$ $\quad$ con a, b t.c. $\Gamma \subset S$

Ora

$|t-\tau| \leq a$ e $|y-\xi| \leq b$

$\Rightarrow |y| \leq b + |\xi|$

Utilizziamo ora l'ipotesi di sublinearità, si ha:

$|f(t,y)| \leq K_1 + K_2|y| \leq K_1 + K_2(b + |\xi|) \leq K_1 + K_2 \cdot b + K_2 |\xi|$

Poniamo $K_3 \overset{def}{=} K_1 + K_2 |\xi|$

Riassumendo il tutto si ha:

$|f(t,y)| \leq K_3 + K_2 b$

$\Rightarrow M \leq K_3 + K_2 b$ $\quad$ dove $M = \sup |f(t,y)|$

$\Rightarrow \frac{M}{b} \leq \frac{K_3}{b} + K_2$

Scegliendo $b = K_3$ $\Rightarrow \frac{M}{b} \leq 1 + K_2$ $\Rightarrow \frac{b}{M} \geq \frac{1}{1+K_2}$

Scegliamo ora $\delta_0 = \min \left\{ a, \frac{1}{1+K_2} \right\}$

In questo modo abbiamo trovato b e δ_0 per poter prolungare la soluzione a tutto $[\tau_1, \tau_2]$ in un numero finito di passi

$\blacksquare$

148. Lemma di sublinearità

giovedì 13 gennaio 2022 11:50

f è sublineare se:

1) f è limitata in S
2) $f(t,0)$ è limitata ed f è lipschitziana in $\bar{S}$ rispetto ad y uniformemente rispetto a T
3) $f(t,0)$ è limitata e $\frac{\partial f_J}{\partial y_K}$ sono continue e limitate in $\bar{S}$

DIM

①: dato che f è limitata $\Rightarrow |f(t,y)| \leq K \Rightarrow f$ è sublineare

②: Abbiamo che $|f(t,y) - f(t,0)| \leq L \cdot |y - 0| \Rightarrow |f(t,y) - f(t,0)| \leq L \cdot |y| \Rightarrow |f(t,y)| \leq |f(t,0)| + L \cdot |y| \leq K + L \cdot |y| \Rightarrow f$ è sublineare in $\bar{S}$

③:

149.. Teorema di abbandono del compatto per la soluzione massimale (senza dimostrazione)

giovedì 13 gennaio 2022 11:58

Valgono le ipotesi del teorema di $\exists!$ globale.

Sia D_0 un compatto in D con $(\tau, \xi) \in D_0$ e $J_\varphi = (T_{min}, T_{max})$ l'intervallo massimale di $\varphi(t; \tau, \xi)$

Allora il grafico di φ esce da D_0 per $t \to T_{max}^-$ e per $t \to T_{min}^+$

$\blacksquare$